Министерство образования и науки РФ

Пермский государственный технический университет

Кафедра общей физики

МЕХАНИКА

Лабораторный практикум

Пермь, 2004

УДК 53(07):378

МЕХАНИКА: лабораторный практикум / Составители: **К.Н. Лоскутов**, доцент; **Ю.А. Барков**, доцент; **С.Д. Ляхова**, ассистент; **Т.Д. Марценюк**, ассистент. Перм. гос. техн. ун-т, Пермь, 2004, - 54 с.

Под общей ред. **А.И. Цаплина,** профессора.

Практикум включает в себя 7 лабораторных работ. В начале каждой работы даны краткие теоретические сведения, а в конце - вопросы для самоконтроля. Указан порядок выполнения работ.

Практикум предназначен для студентов дневной, заочной и дистанционной форм обучения.

Перед каждой лабораторной работой рассматривается теоретический материал, относящийся к данной теме. Однако это не исключает необходимости работы с учебником.

Табл. 9. Ил. 17. Библиогр.: 4 назв.

Рецензент: к. ф.-м. н., доцент **Д.В. Баяндин**

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Лабораторные работы являются неотъемлемой частью изучения курса физики. Цель работ – дать студенту возможность самому воспроизвести некоторые физические явления, научить его обращению с основными физическими приборами и ознакомить с важнейшими методами измерений. Студент должен приобрести навыки ведения лабораторного журнала, построения графиков, оценки достоверности полученных результатов и оформления отчета.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЪЕМА ЦИЛИНДРА

Цель работы: ознакомиться с методом обработки результатов измерений.

Приборы и принадлежности: цилиндр, штангенциркуль, микрометр.

Теоретические сведения

Каждая лабораторная работа физического практикума связана с измерениями тех или иных физических величин. Под измерением понимается сравнение измеряемой величины с другой величиной, принятой за единицу измерения.

Различают измерения **прямые и косвенные**.

Прямые - это измерения, которые производятся с помощью приборов, непосредственно дающих значение измеряемой величины (длины - линейкой, штангенциркулем; времени - секундомером; силы тока - амперметром и т.д.)

Косвенные - это измерения, при которых неизвестная величина определяется по результатам прямых измерений других величин, с которыми она связана определенной формулой, например, плотность вещества ρ вычисляют через измеренные m - массу и V - объем тела по формуле $\rho = m / V$; электросопротивление проводника R - через измеренные напряжение U и силу тока I по формуле $I = U/R$ и т.д.

При измерениях любой величины мы никогда не получаем ее истинного значения. Это объясняется принципиальной невозможностью устранить все посторонние влияния на процесс измерения. Иначе говоря, при всяких измерениях мы допускаем ошибки; их величину принято характеризовать абсолютной погрешностью измерений Δx (см. ниже) и относительной погрешностью ε. Эти характеристики не являются независимыми. На способах определения Δx подробно остановимся ниже. Что же касается ε, то относительной погрешностью измерений называют отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0}.$$

Так как x_0 – величина неизвестная, то на практике x_0 заменяют найденным из опыта среднеарифметическим значением $\langle x \rangle$, поэтому

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle}. \qquad (1.1)$$

Относительную погрешность часто выражают в процентах. Таким образом, задача всякого измерения состоит из нахождения наиболее вероятного значения измеряемой величины и оценки абсолютной и относительной погрешности.

Погрешности прямых измерений

Принято различать три типа погрешностей прямых измерений: ***промахи, систематические погрешности и случайные погрешности***.

1. ***Промахи*** - грубые ошибки, существенно превышающие ожидаемую при данных условиях погрешность. Они вызываются невнимательностью экспериментатора, использованием неисправных приборов и т.д. Как правило, промахи быстро выявляются; наблюдения, содержащие их, следует отбрасывать, как не заслуживающие доверия.

2. ***Случайные погрешности*** - погрешности, вызванные большим числом случайных неконтролируемых помех (сотрясением фундамента здания, изменением напряжения электрической сети, реакцией наблюдателя). В итоге при повторных наблюдениях получаются несколько отличающиеся друг от друга результаты. Исключить случайные погрешности нельзя, можно лишь оценить их величину. Это можно

сделать, применяя **теорию погрешностей**. В основе этой теории лежат два предположения, подтверждаемые опытом:

а) при большом числе измерений случайные погрешности одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто;

б) большие (по абсолютной величине) погрешности встречаются реже, чем малые.

Именно из этих предположений следует, что при многократных измерениях величины $\boldsymbol{x}$ наиболее близким к ее истинному значению $\boldsymbol{x_0}$ является среднее арифметическое значение:

$$\langle x\rangle=\frac{x_1+x_2+.....+x_n}{n}\quad , \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{n}$ - число измерений.

Упомянутая выше теория погрешностей дает возможность найти величину случайной погрешности $\Delta x_{сл}$, т.е. расхождение между x_o и $<x>$. При этом исходят из следующих соображений.

Пусть α характеризует вероятность того, что истинное значение x_o измеряемой величины отличается от $<x>$ на величину, не большую $\Delta x_{сл}$, т.е. вероятность того, что истинное значение попадет в интервал от $<x>$ - $\Delta x_{сл}$ *до* $<x>+\Delta x_{сл}$ (рис.1.1). Например, если α = 0,95, то это означает, что при многократных повторениях опыта ошибки отдельных измерений в 95 случаях из 100 не превысят значения $\Delta x_{сл}$. **Вероятность α** называется **доверительной вероятностью или надежностью, а интервал значений ($<x>\pm\ \Delta x_{сл}$) - доверительным интервалом**. Как видно, $\Delta x_{сл}$ - **это полуширина** доверительного интервала. Ее и принимают за **абсолютную случайную погрешность**. Полуширину доверительного интервала принимают за абсолютную погрешность и в других случаях, например, при косвенных измерениях.

Задача, очевидно, состоит в том, чтобы отыскать $\Delta x_{сл}$ при наперед заданном значении α. Решению этого вопроса помогает существующая между $\Delta x_{сл}$ и α математическая связь. Качественно эта связь ясна: чем с большей надежностью мы хотим указать результат данных измерений, тем больше должен быть доверительный интервал.

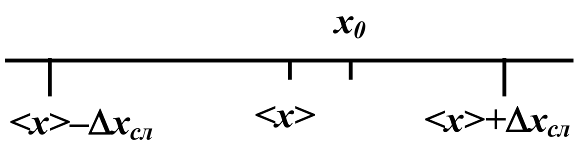

Рис. 1.1

В теории погрешностей в качестве единицы ширины доверительного интервала выбрана так называемая *средняя квадратичная погрешность результата измерений*

$$\Delta S=\sqrt{\frac{\sum\left(x_i-\langle x\rangle\right)^2}{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{\sum \Delta x_i^2}{n(n-1)}}\quad . \tag{1.3}$$

Здесь $\langle x\rangle$ - среднее для измеренных n значений x_i ($i=1, \ldots, n$); $\Delta x_i = x_i - \langle x\rangle$ - отклонение i - го наблюдения от среднего значения, n - число измерений.

Учитывая сказанное, было предложено в случае небольшого числа измерений (именно так обстоит дело в учебных лабораториях) вычислять полуширину доверительного интервала по формуле:

$$\Delta x_{сл} = t_{\alpha,n}\cdot\Delta S = t_{\alpha,n}\cdot\sqrt{\frac{\sum \Delta x_i^2}{n(n-1)}}\quad , \tag{1. 4}$$

где $t_{\alpha,n}$ - некоторое, зависящее от α и n число, называемое **коэффициентом Стьюдента**. Зависимость $t_{\alpha,n}$ от n понятна: чем больше n, тем меньше $\langle x\rangle$ отличается от истинного значения, и тем меньше будет доверительный интервал, точнее результат измерения, а значит меньше $t_{\alpha,n}$.

3. ***Систематическими*** называются погрешности, которые сохраняют свою величину и знак во время эксперимента. Систематические ошибки вызываются разными причинами, односторонне влияющими на результат измерений:

- ограниченной точностью приборов (измерительных инструментов) – приборные (инструментальные погрешности;
- неправильной настройкой (неравные плечи весов, стрелка не установлена на ноль и т.д.);
- в расчетных формулах не учтено влияние некоторых второстепенных факторов (например, при взвешивании не учитывается сила Архимеда, при измерении электросопротивления не учитывается сопротивление проводящих проводов);
- округлениями, которые производятся при измерениях и вычислениях.

В большем числе случаев систематические погрешности могут быть изучены и скомпенсированы путем внесения поправок в результаты измерений. Если же сделать этого нельзя (или сложно), необходимо правильно учесть вклад систематической ошибки в общую ошибку измерений.

При выполнении лабораторных работ приходится оценивать, как правило, следующие систематические ошибки.

а) *Приборная (инструментальная) погрешность.* Погрешность показания прибора (например, связанная с неправильностью разбивки шкалы амперметра, линейки...) является вполне определенной. При обработке результатов измерений этот вид погрешностей задается в виде так называемой *предельной погрешности прибора (*коротко - приборной погрешности), указывающей, какова максимально возможная погрешность при использовании данного прибора. При этом для одних приборов указывается предельная абсолютная погрешность $\Delta x_{пр}$, для других (электроизмерительных, части оптических) предельная относительная погрешность (класс точности прибора k).

Классом точности прибора называется отношение предельной абсолютной погрешности к максимальному значению измеряемой прибором величины

$$k = \frac{\Delta x_{пр}}{x_{макс}} 100 . \tag{1.5}$$

Классов точности семь: 0,02; 0.05; 0,1; 0.5; 1; 2,5; 4. Это число указано на шкале прибора. Зная класс точности и пределы измерения прибора, можно рассчитать его предельную погрешность

$$\Delta x_{пр} = \frac{k x_{макс}}{100} . \tag{1.6}$$

Приборная погрешность других приборов равна *точности* измерительного прибора, под которой понимают ту наименьшую величину, которую можно надежно определить с помощью данного прибора. *Точность* прибора зависит от цены наименьшего деления его шкалы и указывается на самом приборе или в его паспорте. Если этих данных нет, то пользуются следующими правилами: если прибор снабжен нониусом (например, штангенциркуль), то его точность (и приборная погрешность) равна цене наименьшего деления $\Delta x_{пр} = \Delta$. При этом $\Delta = l / m$, где l - цена наименьшего деления *основной шкалы* прибора, m - число делений нониуса. При отсутствии нониуса (линейка, термометр,...) точность прибора равна половине наименьшего деления шкалы прибора $\Delta x_{пр} = \Delta/2$.

Приборная погрешность $\Delta x_{пр}$ представляет собой наибольшую погрешность, даваемую прибором. Действительная же погрешность прибора $\Delta x_{пр}^{ст}$ (стандартное отклонение) носит случайный характер и меньше $\Delta x_{пр}$. Строгих формул для перевода $\Delta x_{пр}$ в $\Delta x_{пр}^{ст}$ нет, чаще всего пользуются выражением

$$\Delta x_{пр}^{ст} = \frac{t_{\alpha,\infty}}{3} \cdot \Delta x_{пр} , \tag{1.7}$$

где $t_{\alpha,\infty}$ **- коэффициент Стьюдента** при $n = \infty$.

Примечание: для электроизмерительных приборов $\Delta x_{пр}$ не зависит от значения измеряемой величины $x_{изм}$. Относительная же погрешность измерения, т.е. $\Delta x_{пр} / x_{изм}$, зависит от $x_{изм}$: чем больше $x_{изм}$, тем меньше относительная погрешность. Поэтому при измерениях рекомендуется выбирать такие пределы измерения, чтобы отсчеты на них производились бы по второй половине шкалы прибора.

б) Погрешность округления при измерении. При измерениях показания приборов часто лежат между делениями шкалы. Отсчет "на глаз" долей деления затруднительны. Поэтому показания приборов, как правило, округляются - возникает *погрешность округления* при измерениях.

Интервал округления может быть различным. Чаще всего это либо цена наименьшего деления шкалы - Δ, либо половина цены деления. Очевидно, **максимальная** погрешность округления равна половине интервала округления, т.е. величине $\Delta/2$. Действительная же погрешность меньше, и при доверительной вероятности α за погрешность округления принимают величину

$$\Delta x_{окр} = \alpha \frac{\Delta}{2} \quad . \tag{1.8}$$

в) Погрешность округления при вычислениях. Этот вид погрешности приходится учитывать только при косвенных измерениях. По этой причине сведения по данной погрешности в следующем разделе.

4. ***Полная погрешность***. Как уже отмечалось, в реальных условиях присутствуют как случайные, так и систематические погрешности. В теории вероятности показывается, что погрешность, обусловленная несколькими независимыми причинами, определяется квадратичным суммированием, т. е. полная абсолютная погрешность прямого измерения

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{сл}^2 + \Delta x_{пр}{}^2 + \Delta x_{окр}^2} \quad . \tag{1.9}$$

Относительная погрешность

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} = \sqrt{\varepsilon_{сл}^2 + \varepsilon_{пр}^2 + \varepsilon_{окр}^2} \quad . \tag{1.10}$$

При этом доверительная вероятность α выбирается одинаковой для всех видов погрешностей.

Некоторые из слагаемых под знаком корня могут быть настолько малыми по сравнению с другими, что ими можно пренебречь (малыми считаются ошибки, которые не превышают 30 % от максимальной).

В заключение отметим, что количество необходимых измерений определяется соотношением приборной и случайной погрешностей. Если при повторных измерениях получается одно и то же значение, то это означает, что случайная погрешность в данном методе измерений значительно меньше приборной и большее число измерений не изменит общей ошибки.

При значительной случайной погрешности (при повторных измерениях получаются отличные друг от друга значения) число измерений лучше выбрать таким, чтобы случайная погрешность среднего арифметического была меньше приборной, или, по крайней мере, одного с ней порядка.

Погрешности косвенных измерений

Задача ставится так: пусть искомая величина z определяется через другие величины a, b, c, ..., полученные при прямых измерениях

$$z = f(a, b, c,...)\ . \tag{1.11}$$

Необходимо найти среднее значение функции и погрешность ее измерений, т.е. найти доверительный интервал

$$z = \langle z \rangle \pm \Delta z \tag{1.12}$$

при надежности α и относительную погрешность $\varepsilon_z = \Delta z / \langle z \rangle$.

Что касается $\langle z \rangle$, то оно находится путем подстановки в правую часть (1.11) вместо a, b, c,... их средних значений

$$\langle z \rangle = f(\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, ...)\ . \tag{1.13}$$

Абсолютная погрешность косвенных измерений Δz является функцией абсолютных погрешностей прямых измерений. Если величины a, b, c, ... в функцию $z = f(a, b, c,...)$ входят в виде сомножителей в той или иной степени, т. е. если

$$z = a^k \cdot b^l \cdot c^m \tag{1.14}$$

(кроме случаев, когда показатель равен –1), то сначала удобно вычислить относительную погрешность

$$\varepsilon_z = \sqrt{k^2\varepsilon_a^2 + l^2\varepsilon_b^2 + \cdots} = \sqrt{k^2\left(\frac{\Delta a}{\langle a\rangle}\right)^2 + l^2\left(\frac{\Delta b}{\langle b\rangle}\right)^2 + \cdots}\quad, \tag{1.15}$$

а затем абсолютную

$$\Delta z = \varepsilon_z\langle z\rangle\ . \tag{1.16}$$

Формулы для Δz и ε_z часто приводятся в справочной литературе.

Примечания.

1. При косвенных измерениях в расчетные формулы могут входить известные физические константы (ускорение свободного падения g, скорость света в вакууме c и т. д.), числа типа $\pi,\ e,$ дробные множители 1/3, 1/6 ... . Эти величины при вычислениях округляются. При этом, естественно, в расчет вносится погрешность $\Delta g, \Delta c, \Delta\pi, \Delta e,$ - погрешность округления при вычислениях, которая должна учитываться.

Принято считать, что погрешность округления приближенного числа равна половине единицы того разряда, до которого это число было округлено. Например, π = 3,14159... . Если взять π = 3,1, то $\Delta\pi$ = 0,05, если π = 3,14, то $\Delta\pi$ = 0,005 ... и т.д. Вопрос о том, до какого разряда округлять приближенное число, решается так: относительная ошибка, вносимая округлением, должна быть того же порядка или на порядок меньше, что и максимальная из относительных ошибок других видов. Таким же образом оценивается абсолютная ошибка табличных данных. Например, в таблице указано $\rho = 13{,}6\cdot10^3$ кг/ м^3, следовательно, $\Delta\rho = 0{,}05\cdot10^3$ кг/м^3.

Ошибки значений универсальных постоянных часто указываются вместе с их средними значениями: c = $\left(299793{,}0 \pm 0{,}3\right)\cdot10^3$ м/с, т.е. Δc = $0{,}3\cdot10^3$ м/с.

2. Иногда при косвенных измерениях условия опыта при повторных наблюдениях не совпадают. В этом случае значение функции z вычисляется для каждого отдельного измерения, а доверительный интервал вычисляется через значения z так же, как при прямых измерениях (все погрешности здесь входят в одну случайную погрешность измерения z). Величины, которые не измеряются, а задаются (если они есть), должны быть указаны при этом с достаточно большой точностью.

Например, при определении вязкости жидкости методом Стокса (лабораторная работа № 2) при использовании нескольких шариков разного диаметра абсолютная погрешность будет (см. (1.4))

$$\Delta\eta = t_{\alpha,n} \cdot \Delta S = t_{\alpha,n}\sqrt{\frac{\sum\left(\eta_i - \langle\eta\rangle\right)^2}{n\left(n-1\right)}}\ , \qquad (1.17)$$

где i - номер опыта, n - число опытов.

В качестве итога всего, сказанного выше, приведем порядок обработки результатов измерений.

Порядок обработки результатов измерений

Прямые измерения

1. Вычислить среднее значение для n измерений: $\langle x\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

2. Найти погрешности отдельных измерений $\Delta x_i = x_i - \langle x\rangle$.

3. Вычислить квадраты погрешностей отдельных измерений и их сумму: $\Delta x_i^2 = \left(x_i - < x >\right)^2, \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2$.

4. Задать надежность α (для наших целей принимаем α = 0,95) и по таблице определить коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha,n}$ и $t_{\alpha,\infty}$.

5. Произвести оценку систематических погрешностей: приборной $\Delta x_{пр}$ и ошибки округления при измерениях $\Delta x_{окр} = \alpha\, \Delta/2$ (Δ - цена деления прибора) и найти полную погрешность результата измерений (полуширину доверительного интервала):

$$\Delta x = \sqrt{t_{\alpha,n}^2\,\frac{\sum_i^n \Delta x_i^2}{n\left(n-1\right)} + \left(\frac{t_{\alpha,\infty}}{3}\right)^2 \cdot \Delta x_{пр}^2 + \left(\alpha\frac{\Delta}{2}\right)^2}\ .$$

6. Оценить относительную погрешность

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x\rangle}\cdot 100\ \%\ .$$

7. Окончательный результат записать в виде

$$x = \langle x\rangle \pm \Delta x, \quad \varepsilon = \cdots\% \quad \text{при } \alpha = ...$$

Косвенные измерения

1. Для каждой величины, измеренной прямым способом, входящей в формулу для определения искомой величины $z = f(a,\ b,\ c,\ \ldots)$, провести обработку, как указано выше.

2. Определить среднее значение искомой величины $z = f(\langle a\rangle, \langle b\rangle, \langle c\rangle, \ldots)$. При этом если среди величин $a, b, c, \ldots$ есть табличные константы или числа типа $\pi, e, \ldots$, то при вычислениях $\langle z\rangle$ округлять их следует так (если это возможно), чтобы вносимая при этом относительная ошибка была на порядок меньше наибольшей относительной ошибки величин, измеренных прямым способом.

3. Если зависимость z от **a, b, c,...** имеет вид $z=a^k\ b^l\ c^m$, где k, l, m - любые действительные числа, то **относительную** ошибку вычисляют так:

$$\varepsilon = \sqrt{k^2\left(\frac{\Delta a}{\langle a\rangle}\right)^2 + l^2\left(\frac{\Delta a}{\langle b\rangle}\right)^2 + \cdots},$$

а затем вычисляют **абсолютную** ошибку $\Delta z = \varepsilon \langle z\rangle$.

4. Окончательный результат следует записать в виде

$$z = \langle z\rangle \pm \Delta z, \% \quad \text{при } \alpha = \ldots .$$

Примечание.

При обработке результатов прямых измерений нужно следовать следующему правилу: численные значения всех рассчитываемых величин должны содержать на один разряд больше, чем исходные (определенные экспериментально) величины.

При косвенных измерениях вычисления $\langle z\rangle$ производить по правилам приближенных вычислений.

В окончательной записи **абсолютной** погрешности следует оставлять только **одну значащую цифру**. Если этой цифрой окажется 1 или 2, то после нее сохраняют еще одну цифру.

Среднее значение округляется до того же результата, что и абсолютная погрешность.

Например: $V = (375{,}21 \pm 0{,}03)\ \text{см}^3 = (3{,}7521 \pm 0{,}0003)\cdot 10^2\ \text{см}^3$,

$I = (5{,}530 \pm 0{,}013)\ \text{А}$, $A = (57{,}5 \pm 0{,}7)\cdot 10^{-2}\ \text{Дж}$.

Порядок выполнения работы

Определение диаметра цилиндра

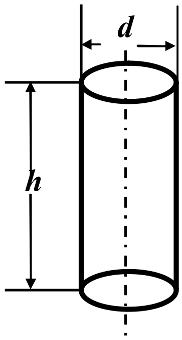

Рис. 1.2

1. Микрометром или штангенциркулем измерить не менее 7 раз (в разных местах и направлениях) диаметр цилиндра (рис. 1.2). Результаты записать в табл. 1.1.

2. Вычислить среднее значение диаметра

$$\langle d \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i ,$$

где n - число измерений, i - номер измерения.

3. Вычислить $\Delta d_i = (d_i - \langle d \rangle)$, Δd_i^2 и $\sum_{i=1}^{n} \Delta d_i^2$.

Таблица 1.1

№№ п/п	d_i, мм	$d_i - \langle d \rangle$, мм	$(d_i - \langle d \rangle)^2$, мм^2	h_i, мм	$h_i - \langle h \rangle$, мм	$(h_i - \langle h \rangle)^2$, мм^2
1 2 3 . . 7						
Сумма						
Среднее значен.						

4. Задавшись надежностью α (от 0,90 до 0,97), по таблице выбрать коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha,n}$ и $t_{\alpha,\infty}$.

5. Определить приборную погрешность $\Delta d_{пр}$. Для микрометра $\Delta d_{пр} = \Delta/2$ (Δ - цена деления микрометра, равная обычно 0,01 мм). Для штангенциркуля $\Delta d_{пр} = \Delta$, Δ - “цена” деления нониуса.

6. Вычислить абсолютную ошибку (полуширину доверительного интервала) в определении диаметра цилиндра:

$$\Delta d = \sqrt{t_{\alpha,n}^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta d_i^2}{n(n-1)} + \left(\frac{t_{\alpha,\infty}}{3}\right)^2 \Delta d_{np}^2 + \left(\alpha \frac{\Delta}{2}\right)^2} \ .$$

7. Вычислить относительную погрешность $\varepsilon_d = \Delta d / \langle d \rangle$.

Определение высоты цилиндра

Все измерения и вычисления, выполненные при определении диаметра цилиндра, повторить при той же надежности α для высоты цилиндра h. Результаты записать в табл. 1.1.

Определение объема цилиндра

1. Вычислить среднее значение объема цилиндра

$$\langle V \rangle = \pi/4 \, \langle d \rangle^2 \, \langle h \rangle.$$

2. Вычислить относительную погрешность определения объема

$$\varepsilon_v = \sqrt{4\varepsilon_d^2 + \varepsilon_h^2 + \varepsilon_\pi^2}, \text{ где } \varepsilon_\pi = \Delta\pi/\pi.$$

3. Вычислить полуширину доверительного интервала

$$\Delta V = \varepsilon_v \langle V \rangle.$$

4. Результаты записать в виде

$$V = \langle V \rangle \pm \Delta V, \qquad \varepsilon_v = \ldots\%, \text{ при } \alpha = \ldots .$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ СТОКСА

Цель работы: измерить коэффициент вязкости.

Приборы и принадлежности: стеклянный цилиндр с исследуемой жидкостью, металлические шарики, микрометр, секундомер, миллиметровая линейка.

Краткие теоретические сведения

При движении жидкости между ее соседними слоями, движущимися с разными скоростями, возникают силы **внутреннего трения,** действующие таким образом, чтобы уравнять скорости всех слоев. Возникновение этих сил объясняется тем, что слои, движущиеся с разными скоростями, обмениваются молекулами. Молекулы из более быстрого слоя передают более медленному слою некоторое количество движения (импульс), вследствие чего он начинает двигаться быстрее. Молекулы из более медленного слоя получают в быстром слое некоторое количество движения, что приводит к торможению быстрого слоя. При переносе импульса от слоя к слою происходит изменение импульса всех слоев. Это значит, что **на каждый из слоев действует сила**, **равная изменению импульса в единицу времени (второй закон Ньютона).**

Рассмотрим жидкость, движущуюся в направлении оси $\boldsymbol{x}$ (рис. 2.1). Пусть на расстоянии $\boldsymbol{dz}$ скорости потока отличаются на величину $\boldsymbol{dv}$. Отношение $\boldsymbol{dv/dz}$ характеризует изменение скорости потока в направлении оси z и называется **градиентом** скорости. Таким образом, *градиент скорости численно равен изменению скорости на единице длины в направлении, перпендикулярном скорости*.

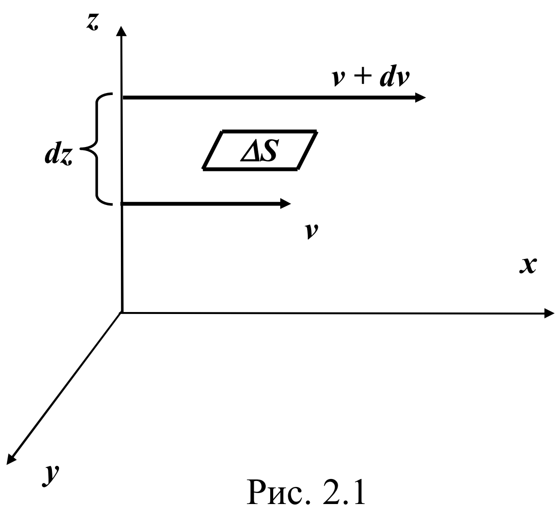

Рис. 2.1

Согласно закону Ньютона, сила внутреннего трения (вязкости), действующая между двумя слоями, пропорциональна площади их соприкосновения $\boldsymbol{\Delta S}$ и градиенту скорости:

$$F = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S \qquad (2.1)$$

Величина η (“эта”) называется **коэффициентом внутреннего трения** или коэффициентом динамической вязкости. Если в формуле (2.1) положить численно $dv/dz = 1$ и $\Delta S = 1$, то $F = \eta$, т.е. *коэффициент динамической вязкости численно равен силе внутреннего трения, возникающей на каждой единице поверхности соприкосновения двух слоев, движущихся относительно друг друга с градиентом скорости, равным единице.* В системе СИ единица измерения [η] = кг / (м·с) = Па·с.

Коэффициент вязкости η зависит от природы жидкости и для данной жидкости с повышением температуры уменьшается.

Силами внутреннего трения в жидкости обусловлено сопротивление, которое испытывает твердое тело при движении относительно жидкости. Аналитическое решение задачи нахождения силы сопротивления является очень сложным. Подобная задача была решена английским физиком **Стоксом** лишь для случая очень медленного движения шарика в безграничном объеме жидкости. **Сила сопротивления** в этом случае оказалась равной следующей величине:

$$F = 6\,\pi\,\eta\, r\, v\,, \qquad (2.2)$$

здесь r - радиус шарика; v - его скорость относительно части жидкости, находящейся в покое.

Метод Стокса

Формула Стокса (2.2) позволяет определить коэффициент вязкости η, если известны другие величины. Метод определения коэффициента вязкости с помощью уравнения (2.2) называется методом Стокса.

Рассмотрим падение шарика в вязкой жидкости. При движении шарика слой жидкости, граничащий с его поверхностью, прилипает к шарику и движется со скоростью шарика, поэтому различные слои отличаются по скорости, и возникает сила вязкого трения.

На шарик, падающий в вязкой жидкости, действуют три силы (рис.2.2):

1) **сила тяжести** $F_1 = mg = \rho Vg$;

2) **сила Архимеда** $F_2 = \rho_ж Vg$ (равная весу жидкости в объеме шарика);

3) **сила сопротивления**, обусловленная вязкостью жидкости $F_3 = 6\pi\eta\, rv$.

Здесь ρ - плотность материала шарика; $\rho_{ж}$ - плотность жидкости; V – объем шарика; g - ускорение свободного падения. Все три силы направлены по вертикали: F_1 - вниз, F_2 и F_3 - вверх.

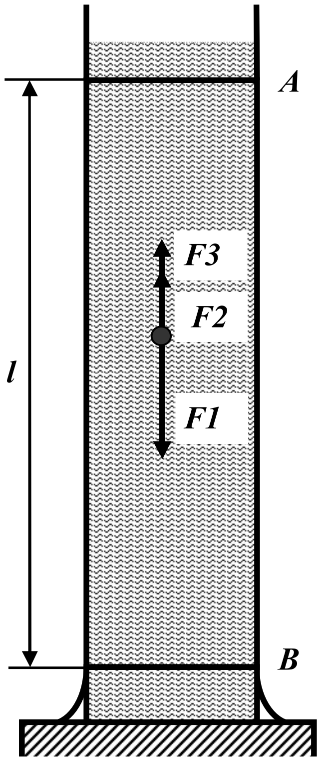

Рис. 2.2

В общем случае уравнение движения шарика имеет вид

$$F_1 - F_2 - F_3 = m\, dv/dt. \qquad (2.3)$$

Сила сопротивления с увеличением скорости движения шарика возрастает, а ускорение dv/dt уменьшается до тех пор, пока шарик не достиг такой скорости v_0, при которой ускорение равно нулю. Тогда уравнение (2.3) примет вид:

$$(\rho - \rho_{ж})\, Vg - 6\pi\eta\, r\, v_0 = 0\,. \qquad (2.4)$$

В этом случае шарик движется с постоянной скоростью v_0.

Решая уравнение (2.4) относительно η, получим

$$\eta = \frac{(\rho - \rho_c)Vg}{6\pi r v_0}. \qquad (2.5)$$

Если теперь учесть, что $V = 4/3\ \pi\ r^3$, $r = d/2$, $v_0 = l\,/\,t$, где d – диаметр шарика; l- длина участка равномерного движения, пройденного за время t, то формула (2.5) примет окончательный вид:

$$\eta = \frac{g(\rho - \rho_c)d^2 t}{18 l}. \qquad (2.6)$$

Таким образом, для нахождения η нужно измерить d, l и t.

Описание установки

Длинный стеклянный цилиндр, наполненный исследуемой жидкостью, имеет две горизонтальные метки: A и B, расположенные на расстоянии l друг от друга. Метка A установлена так, что при прохождении через нее шарики уже имеют постоянную скорость v_0 (см. рис.2.2).

Порядок выполнения работы и обработка результатов измерений

1. Измерить диаметр шарика микрометром. Записать результат в табл. 2.1.

Таблица 2.1

ρ = … кг/ м^3			$\rho_{ж}$ = … кг/ м^3		l = … см
№ п/п	d, мм	t, с	η_i, Па·с	$\Delta\eta_i = \langle\eta\rangle - \eta_i$, Па·с	$\Delta\eta_i^2$, Па^2·с^2
1 2 3 4 . . . 7					
$\langle\eta_i\rangle$ =				$\Sigma\, \Delta\eta_i^2$ =	

2. С помощью секундомера измерить время прохождения шариком расстояния между метками A и B. Записать результат в табл. 2.1. Опыт произвести с 5 - 7 шариками.

3. Измерить расстояние l между метками. Записать в табл. 2.1.

4. Так как η зависит от температуры, записать в таблицу температуру T, при которой производятся измерения.

5. По результатам каждого опыта вычислить коэффициент вязкости по формуле (2.6). Плотность материала шарика указывается лаборантом, плотность жидкости измеряется ареометром (если прибор отсутствует - ее тоже задает лаборант).

6. Найти среднее значение $\langle\eta\rangle$ из вычисленных по формуле (2.6).

7. Абсолютную погрешность измерений (полуширину доверительного интервала) найти по формуле

$$\Delta\eta = t_{\alpha,n}\sqrt{\frac{\sum \Delta\eta_i^2}{n(n-1)}}\ .$$

Коэффициент Стьюдента, $t_{\alpha,n}$ - найти по таблице (приложение 1), задавшись надежностью α.

8. Оценить точность измерений, найдя относительную погрешность

$$\varepsilon = \Delta r / \langle r \rangle .$$

9. Окончательный результат записать в виде доверительного интервала $\eta = \langle\eta\rangle \pm \Delta\eta$ с указанием значения α .

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое вязкость жидкости? Объясните возникновение сил вязкости с молекулярно-кинетической точки зрения.
2. Каков физический смысл коэффициента динамической вязкости? Пользуясь формулой (2.2), выведите единицы измерения коэффициента вязкости.
3. Что называется градиентом скорости?
4. Запишите и поясните формулу Стокса для силы вязкости.
5. Какие силы действуют на шарик, падающий в жидкости? Как они направлены?
6. Сформулируйте закон Архимеда.
7. Запишите уравнение движения шарика в жидкости.
8. Каков характер движения шарика в жидкости между метками ***A*** и ***B***?
9. Выведите расчетную формулу для коэффициента вязкости.
10. Порядок выполнения лабораторной работы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

МАЯТНИК ОБЕРБЕКА

Цель: познакомиться с динамическими характеристиками вращательного движения твердого тела, а также с использованием основного закона динамики вращательного движения.

Приборы и принадлежности: маятник Обербека, секундомер, мерительная линейка, штангенциркуль.

Краткие теоретические сведения

Момент инерции маятника в данной работе определяется из основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела. Динамическими характеристиками вращательного движения тела являются: **момент инерции** тела относительно оси**, момент силы** относительно оси**, момент импульса** тела относительно оси вращения.

Момент инерции тела относительно оси

Пусть имеется твердое тело. Выберем некоторую прямую ***OO*** (рис.3.1), которую будем называть осью (прямая ***OO*** может быть и вне тела). Разобьем тело на элементарные участки (материальные точки) массами Δm_1, $\Delta m_2,...,\Delta m_i$, находящиеся от оси на расстоянии соответственно r_1, r_2,... r_i .

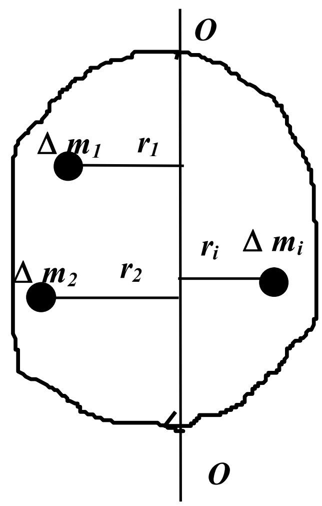

Рис.3.1

Моментом инерции материальной точки относительно оси *OO* называется произведение массы материальной точки на квадрат ее расстояния до этой оси:

$$\Delta I_i = \Delta m_i \cdot r_i^2. \qquad (3.1)$$

Моментом инерции (МИ) тела относительно оси ***OO*** называется сумма произведений масс элементарных участков тела на квадрат их расстояния до оси:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \; r_i^2 . \qquad (3.2)$$

Как видно, момент инерции тела есть величина аддитивная - момент инерции всего тел относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции отдельных его частей относительно той же оси.

В данном случае

$$I=\sum_{i=1}^{n}\Delta I_i\ .$$

Измеряется момент инерции в кг·м^2.

Так как

$$\Delta m_i=\rho\,\Delta V_i\ ,\tag{3.3}$$

где $\boldsymbol{\rho}$ - плотность вещества; ΔV_i - объем i - го участка, то $I=\sum\rho r_i^2\Delta V_i$ или, переходя к бесконечно малым элементам,

$$I=\int_V\rho\,r^2dV\ .\tag{3.4}$$

Формулу (3.4) удобно использовать для вычисления МИ однородных тел правильной формы относительно оси симметрии, проходящей через центр масс тела. Например, для МИ цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс параллельно образующей, эта формула дает

$$I=\frac{1}{2}mR^2,$$

где m - масса; R - радиус цилиндра.

Большую помощь при вычислениях МИ тел относительно некоторых осей оказывает **теорема Штейнера**: МИ тела I относительно любой оси равен сумме МИ этого тела I_c относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельно данной, и произведения массы тела на квадрат расстояния d между указанными осями:

$$I=I_c+m\,d^2.\tag{3.5}$$

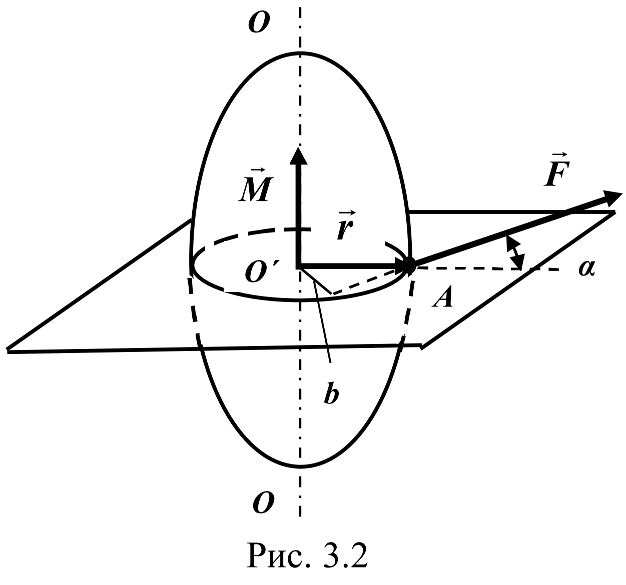

Рис. 3.2

Момент силы относительно точки и оси

Пусть на тело действует сила $\vec{F}$. Примем для простоты, что сила $\vec{F}$ лежит в плоскости, перпендикулярной некоторой прямой OO (рис.3.2), которую назовем осью (например, это ось вращения тела). На рис. 3.2 $\boldsymbol{A}$ - точка приложения силы $\vec{F}$; $\boldsymbol{O'}$ - точка пересечения оси с плоскостью, в которой лежит сила; $\boldsymbol{A}$ относительно точки $\boldsymbol{O'}$; α - угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Моментом силы $\vec{F}$ относительно точки $\boldsymbol{O'}$ называется вектор $\vec{M}$ (псевдовектор), определяемый равенством

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right]. \tag{3.6}$$

Модуль этого вектора

$$M = F \cdot r \cdot sin\,\alpha\ . \tag{3.6, a}$$

Величина $b = r \cdot sin\ \alpha$ называется плечом силы (кратчайшее расстояние от точки $\boldsymbol{O'}$ до линии действия силы).

Моментом силы относительно оси $\boldsymbol{OO}$ называется скалярная величина M_{00}, равная проекции на эту ось вектора $\vec{M}$ момента силы, определенного относительно точки $\boldsymbol{O'}$, лежащей на данной оси.

В нашем случае

$$M_{00} = \left|\vec{M}\right| = F \cdot r \cdot sin\,\alpha\,. \tag{3.7}$$

В соответствии с выражениями (3.6) и (3.7) вектор $\vec{M}$ направлен по оси $\boldsymbol{OO}$, а его проекция M_{00} лежит на этой оси (см. рис.3.2).

Момент импульса тела относительно оси вращения

Пусть тело вращается вокруг некоторой оси $\boldsymbol{OO}$ с угловой скоростью ω. Разобьем это тело мысленно на элементарные участки с массами Δm_1, Δm_2, ... Δm_i, ..., которые находятся от оси соответственно на расстояниях Δr_1 , Δr_2, ... , Δr_3 , ..., и вращаются по окружностям, имея линейные скорости v_1, v_2, ... , v_i, ... Известно, что величина, равная $\Delta m_i \vec{v}_i = \Delta \vec{P}_i$ - есть импульс $\boldsymbol{i}$ - го участка. *Моментом импульса* $\boldsymbol{i}$ - го участка (материальной точки) относительно точки $\boldsymbol{O'}$ называется вектор (псевдовектор)

$$\Delta \vec{L}_i = [\vec{r}_i \times \Delta \vec{p}_i]\,, \tag{3.8}$$

где $\vec{r}_i$ - радиус-вектор, определяющий положение $\boldsymbol{i}$ -го участка относительно точки $\boldsymbol{O'}$.

Моментом импульса всего тела относительно точки $\boldsymbol{O'}$ называют вектор:

$$\vec{L}_i \equiv \sum_{i=1}^{n} \Delta \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \times \Delta \vec{p}_i \right], \tag{3.9}$$

модуль которого

$$L = \sum_{i=1}^{n} \Delta\, m_i v_i r_i \ . \tag{3.9, а}$$

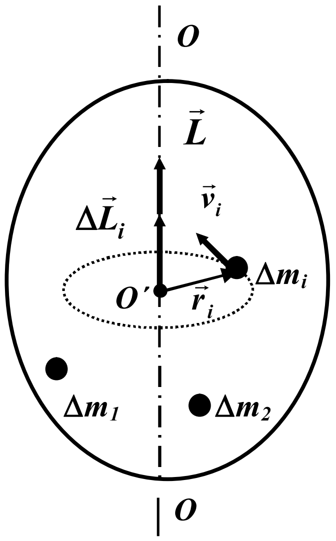

Рис. 3.3

Моментом импульса тела относительно неподвижной оси $\boldsymbol{OO}$ называется скалярная величина L_{00}, равная проекции на эту ось вектора $\vec{L}_i$ момента импульса тела, определенного относительно точки $\boldsymbol{O'}$, лежащей на данной оси.

В соответствии с выражениями (3.8) и (3.9) векторы $\Delta\vec{L}$ и $\vec{L}$ направлены по оси $\boldsymbol{OO}$ (рис.3.3). Легко показать, что **момент импульса тела** L_{00} относительно оси ОО и **момент инерции** I этого тела относительно той же оси связаны соотношениями

$$\vec{L} = I\vec{\omega}\ , \quad L_{00} = I \cdot \omega \ . \tag{3.10}$$

Основной закон динамики вращательного движения

В случае постоянного момента инерции тела в процессе вращения “Основной закон...” читается так: **момент силы** (или результирующий момент сил, если их несколько), действующий на тело относительно оси вращения, **равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловое ускорение**, с которым вращается тело:

$$M = I\,\varepsilon\ . \tag{3.11}$$

Описание установки и метода определения момента инерции

Маятник Обербека представляет собой крестовину, состоящую из втулки 3, четырех спиц 2, укрепленных на одном из концов втулки (рис. 3.4). На спицах размещены грузы 1. Последние могут перемещаться вдоль спиц и закрепляться на них с помощью винтов. Другой конец втулки выполнен в виде шкива 4 , на который наматывается нить-шнур. К свободному концу шнура привязан груз 6. Под влиянием этого груза маятник приходит в ускоренное вращательное движение вокруг неподвижной оси. Трение между втулкой маятника и осью практически сведено к нулю установленными на ось подшипниками. Для установки груза 5 на определенной высоте предусмотрен указатель 5. Исходным уравнением для определения момента инерции $\boldsymbol{I}$ маятника является уравнение (3.11), из которого следует, что

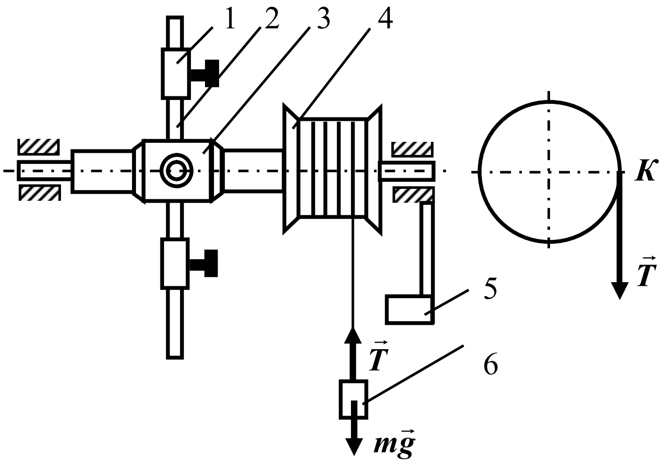

Рис. 3.4

$$I = \frac{M}{\varepsilon}, \tag{3.12}$$

где $\boldsymbol{M}$ - вращающий момент, в данном случае - момент силы $\boldsymbol{T}$ натяжения шнура, приложенной в точке $\boldsymbol{k}$ (рис. 3.4); $\boldsymbol{\varepsilon}$ - угловое ускорение маятника.

Нить маятника вертикальна, поэтому угол $\boldsymbol{\alpha}$ в формуле (3.6, а) равен 90^0, так что

$$M = T\,R, \tag{3.13}$$

где $\boldsymbol{R}$ - радиус шкива.

Сила $\boldsymbol{T}$ может быть найдена из второго закона Ньютона, записанного для груза 6:

$$ma = mg - T,$$

где $\boldsymbol{m}$ - масса груза, $\boldsymbol{a}$ - ускорение, с которым он опускается, откуда

$$T = m\,(g - a). \tag{3.14}$$

Таким образом, подставляя (3.14) в (3.13), получим

$$M = m(g - a)\,R. \tag{3.15}$$

Угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ связано с тангенциальным ускорением $\boldsymbol{a_\tau}$ точек на ободе колеса следующим соотношением:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{a_\tau}}{\boldsymbol{R}}.$$

В свою очередь, $\boldsymbol{a_\tau}$ совпадает с ускорением $\boldsymbol{a}$, с которым опускается груз 6. Следовательно,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{R}}. \qquad (3.16)$$

Ускорение $\boldsymbol{a}$ можно вычислить, если измерить время $\boldsymbol{t}$ опускания груза на определенную высоту $\boldsymbol{h}$. Действительно,

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{t}^2}{2},$$

поэтому

$$\boldsymbol{a} = \frac{2\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{t}^2}. \qquad (3.17)$$

Подставляя (3.17) в (3.16) и (3.15), а затем в (3.12), получим

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{mR}^2\left(\boldsymbol{gt}^2 - 2\boldsymbol{h}\right)}{2\boldsymbol{h}} = \frac{\boldsymbol{md}^2\left(\boldsymbol{gt}^2 - 2\boldsymbol{h}\right)}{8\boldsymbol{h}}, \qquad (3.18)$$

где $\boldsymbol{d} = 2\,\boldsymbol{R}$ - диаметр шкива.

Заметим, однако, что второе слагаемое в выражении (3.18) оказывается на практике значительно меньше первого, а потому момент инерции маятника можно вычислить как

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{md}^2\boldsymbol{gt}^2}{8\boldsymbol{h}}. \qquad (3.19)$$

Формула (3.19) - рабочая формула для определения $\boldsymbol{I}$ из законов динамики. С другой стороны, как уже отмечалось, момент инерции тела - величина аддитивная. Следовательно, момент инерции маятника Обербека относительно оси вращения можно представить в виде

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I_в} + \boldsymbol{I_ш} + 2\boldsymbol{I_{сп}} + 4\boldsymbol{I_{гр}} \qquad (3.20)$$

где: $I_в$ - момент инерции втулки; $I_ш$ - момент инерции шкива; $I_{пс}$ - момент инерции пары спиц; $I_{гр}$ - момент инерции одного груза 1. Разумеется, все эти моменты инерции в данном случае берутся тоже относительно оси вращения.

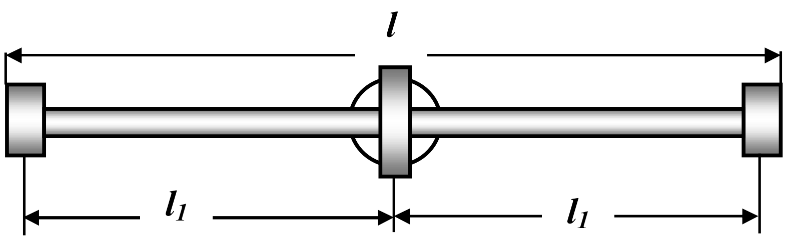

Рис. 3.5

Так как $I = ml^2/12$, где l и $m_{пс}$ - общая длина (рис. 3.5) и масса двух спиц, а для случая, когда грузы 1 находятся на концах спиц,

$$I_{гр} = m_{гр} l_1^2$$

(груз - материальная точка), где l_1 - расстояние от центра масс груза до оси, а $m_{гр}$ - масса груза 1, то

$$I = (I_в + I_ш) + 1/6 \cdot m_{пс} l^2 + 4\, m_{гр} l_1^2. \tag{3.21}$$

Порядок выполнения работы

1. Внесите в таблицу данные о массе груза 6 и ускорении свободного падения для широты г. Перми (написаны на приборе).

2.Установите грузы 1 на концы спиц, причем так, чтобы маятник находился в безразличном равновесии.

3. Наматывая нить на шкив, установите груз 6 так, чтобы основание груза совпало с указателем 5 (см. рис.3.4). Следите за тем, чтобы витки нити на шкив наматывались в один слой, а нить намоталась бы с внешней стороны маятника. В этом положении маятник придерживайте рукой за одну из спиц.

4. Измерьте время t_1 опускания груза 6 с установленной высоты до пола. Для чего отпустите маятник без толчка, включив одновременно секундомер. Опыт повторите не менее 7 раз. Результаты занесите в табл.3.1.

5. Передвиньте грузы 1 примерно на середину спиц и установите их так, чтобы маятник находился в безразличном равновесии. По п. 4 измерьте время t_2 движения груза в этом случае. Результаты запишите в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Номер опыта	t_1, с	t_2, с	$t_{1i} - \langle t_1 \rangle$, с	$(t_{1i} - \langle t_1 \rangle)^2$, с^2	Другие данные
1 2 3 . . . 7					$m=\langle m\rangle\pm\Delta m$ g = d = h = α = $t_{\alpha,n}$ = Δ_t = $\Delta t_{пр}$ =
	$\langle t_1\rangle$	$\langle t_2\rangle$	$\Sigma\,(t_{1i} - \langle t_1 \rangle)^2$		

6. Измерьте диаметр шкива d и высоту падения груза h, оцените ошибки Δd и Δh в измерении этих величин. Данные занесите в табл. 3.1.

7. Вычислите $<t_1>$ и $<t_2>$ и по формуле

$$<I> = \frac{\langle m\rangle\,\langle d\rangle^2\,\langle g\rangle\,\langle t\rangle^2}{8\,\langle h\rangle}$$

вычислите среднее значение моментов инерции $\langle I_1\rangle$ и $\langle I_2\rangle$ (для того и другого расположения грузов 1).

8. Определите относительную погрешность в вычислении момента инерции (только для I_1 или только для I_2, так как погрешности будут приблизительно одинаковыми).

Для чего:

а) задайтесь надежностью α (от 0,90 до 0,97), выберите коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha,n}, t_{\alpha,\infty}$, оцените $\Delta t_{пр}$ для секундомера;

б) вычислите абсолютную погрешность в измерении времени:

$$\Delta t = \sqrt{t^2_{\alpha,n}\frac{\sum\left(t_i - \langle t\rangle\right)^2}{n\left(n-1\right)} + \left(\frac{t_{\alpha,\infty}}{3}\right)^2(\Delta\, t_{пр})^2 + \left(\alpha\,\frac{\Delta_t}{2}\right)^2}\quad;$$

в) вычислите относительную погрешность в определении $\boldsymbol{I}$ (например, для $\boldsymbol{I}_1$):

$$\varepsilon_I=\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{\langle m\rangle}\right)^2+4\left(\frac{\Delta d}{\langle d\rangle}\right)^2+\left(\frac{\Delta g}{\langle g\rangle}\right)^2+4\left(\frac{\Delta t}{\langle t\rangle}\right)^2+\left(\frac{\Delta h}{\langle h\rangle}\right)^2}\quad ;$$

9. Вычислите абсолютную погрешность для обоих моментов инерции:

$$\Delta I_1=\varepsilon_I\langle I_1\rangle\ ,\quad \Delta I_2=\varepsilon_I\langle I_2\rangle\ ,$$

результаты запишите в виде

$$I_1=\langle I_1\rangle \pm \Delta I_1\,,\qquad \text{при } \varepsilon_I=\ldots\%,$$
$$I_2=\langle I_2\rangle \pm \Delta I_2\,.\qquad \alpha=\ldots\,.$$

10. Сравнивая $\boldsymbol{I}_1$ и $\boldsymbol{I}_2$, сделайте вывод (касающийся связи величины момента инерции и расположения грузов 1).

11. Измерьте $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{l_1}$ (лучше $2\boldsymbol{l_1}$) (см. рис.3.5) и по формуле (3.20) вычислите момент инерции как аддитивную величину $\boldsymbol{I_1^{ад}}$ ($\boldsymbol{m_{пс}}$, $\boldsymbol{m_{гр}}$ и $(\boldsymbol{I_в}+\boldsymbol{I_ш})$ должны быть даны). Значения всех этих величин внесите в тетрадь.

12. Найдите расхождение в процентах между значениями $\boldsymbol{I_1}$ и $\boldsymbol{I_1^{ад}}$, полученными из опыта и вычисленными по формуле (3.21).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется моментом инерции материальной точки относительно оси, моментом инерции твердого тела относительно оси? В каких единицах измеряется момент инерции?

2. В чем состоит теорема Штейнера? Приведите пример ее использования.

3. Что называется моментом силы относительно оси? В каких единицах он измеряется?

4. Что такое плечо силы?

5. Что называется моментом импульса материальной точки относительно оси вращения, моментом импульса твердого тела относительно оси вращения? В каких единицах измеряется момент импульса?

6. Как связаны между собой момент импульса и момент инерции тела, вычисленные относительно оси вращения?

7. Маятник Обербека: устройство и теория метода определения его инерции.

8. Порядок выполнения работы. Выводы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Цель: познакомиться с методом определения моментов инерции тел.

Приборы и принадлежности: исследуемое тело (пластина), кронштейн для подвешивания тела, секундомер, линейка, математический маятник.

Краткие теоретические сведения

Физическим маятником (ФМ) называется твердое тело, которое может колебаться под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси (не проходящей через центр масс тела).

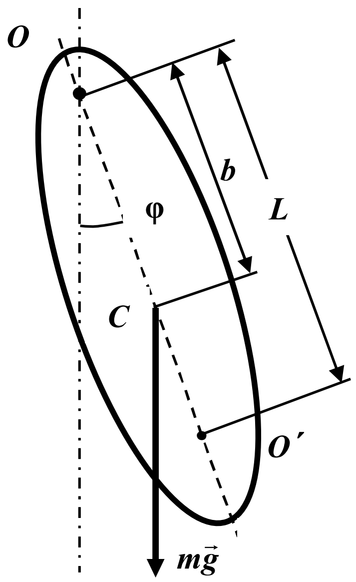

Рис. 4.1.

При колебании ФМ вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку ***O*** (рис. 4.1). Эта точка называется точкой подвеса. Движение маятника подчиняется основному уравнению динамики вращательного движения:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} \quad \text{или} \quad M = I\varepsilon\,, \tag{4.1}$$

где ***M*** - момент силы тяжести относительно оси ***O***; ***I*** - момент инерции маятника относительно той же оси; $\vec{\varepsilon}$ - угловое ускорение маятника.

Из рис. 4.1 видно, что

$$M = -\,mgb\sin\varphi\,, \tag{4.2}$$

где ***m*** - масса маятника; ***b sin*** φ - плечо силы тяжести ***mg***; ***b*** - расстояние от точки подвеса ***O*** до центра масс ***C***.

Знак “-” означает, что вращающий момент ***M*** стремится уменьшить угол φ, характеризующий отклонение маятника от равновесного положения. Более строго смысл знака “-” объясняется так: псевдовекторы момента сил $\vec{M}$ и смещения от положения равновесия $\vec{\varphi}$ направлены в противоположные стороны (для ситуации, изображенной на рис. 4.1 первый направлен за плоскость чертежа, а второй - из этой плоскости на наблюдателя). Помня, что $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, и учитывая (4.1), уравнение (4.2) запишем в виде

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgb \cdot sin\varphi = 0\ . \tag{4.3}$$

При малых отклонениях маятника (именно этот случай мы и будем иметь в виду) $\boldsymbol{sin}\ \varphi \approx \varphi$, а потому равенство (4.3) после деления на $\boldsymbol{I}$ примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{m\,g\,b}{I}\varphi = 0. \tag{4.4}$$

Положительная величина $\boldsymbol{mgb/I}$ может быть заменена квадратом некоторого числа:

$$m\ g\ b\ /\ I \equiv \omega_0^2\ \ . \tag{4.5}$$

Тогда уравнение (4.4) можно переписать как

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0. \tag{4.6}$$

Используя прямую подстановку, убеждаемся, что решением уравнения (4.6) является выражение

$$\varphi = \varphi_0\ cos\ (\ \omega_0 t + \alpha\ )\ . \tag{4.7}$$

Это свидетельствует о том, что ФМ совершает в этих условиях незатухающие гармонические колебания с циклической частотой $\boldsymbol{\omega_0}$. Амплитуда и начальная фаза φ_0 и α – постоянные, зависящие от начальных условий.

Период колебаний ФМ

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}. \tag{4.8}$$

Величина $\boldsymbol{I\ /\ mb}$ имеет размерность длины, обозначим ее $\boldsymbol{L}$ и назовем **приведенной длиной ФМ:**

$$L = I\,/\,m\ b\ \ . \tag{4.9}$$

Таким образом,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \qquad (4.10)$$

Сравнивая (4.10) с формулой для периода колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, где l - длина математического маятника, видим, что **приведенная длина ФМ - это длина такого математического маятника, у которого период колебаний совпадает с периодом колебаний данного ФМ.** Легко заметить, что $L > b$. В самом деле, в соответствии с теоремой Штейнера $I = I_c + mb^2$, где I_c - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс. Следовательно, по выражению (4.9)

$$L \equiv \frac{I}{m\,b} = \frac{I_c + m\,b^2}{m\,b} = \frac{I_c}{m\,b} + b, \qquad (4.11)$$

откуда видно, что $L > b$.

Точку O' (см. рис. 4.1), отстоящую от O на расстоянии L, называют точкой качаний.

Описание установки и метода определения момента инерции

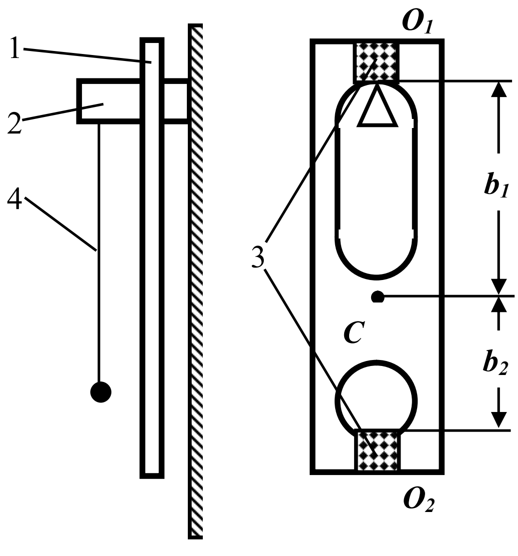

Рис. 4.2

Исследуемое тело 1 представляет собой металлическую пластину с двумя вырезами (рис. 4.2). Этими вырезами тело подвешивается на опору - кронштейн 2 для организации колебаний. Чтобы уменьшить трение и износ детали точки подвеса O_1 и O_2 снабжены специальными подставками 3. На конце кронштейна может быть подвешен математический маятник 4, длину которого можно изменять.

В работе определяются моменты инерции I_1 и I_2 относительно осей O_1 и O_2. Метод определения моментов инерции основан на том, что период колебаний ФМ связан с его моментом инерции относительно оси колебания (см. формулу (4.8)). Таким образом, измерив на опыте период колебаний маятника T и расстояние $\boldsymbol{b}$ от точки подвеса до центра масс (см. рис.4.1), зная массу $\boldsymbol{m}$ маятника и ускорение свободного падения $\boldsymbol{g}$, можно вычислить момент инерции:

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{T}^2 \boldsymbol{mgb}}{4\pi^2}. \tag{4.12}$$

Порядок выполнения работы

1. Снять пластину с подвеса, измерить линейкой расстояния $\boldsymbol{b_1 = O_1C}$ и $\boldsymbol{b_2 = O_2C}$ (см. рис.4.2) и оценить ошибку $\Delta\, \boldsymbol{b}$ этих измерений. Результаты занести в табл. 4.1; сюда же вписать данные о массе тела и ускорении свободного падения.

2. Подвесить маятник на ось $\boldsymbol{O_1}$, привести его в движение ($\varphi \le 8^o$) и измерить время $\boldsymbol{t_1}$ для 30-50 полных колебаний $\boldsymbol{N}$. (Отсчет времени лучше начинать после того, как тело совершит несколько колебаний). Опыт повторить не менее 5 раз при одном и том же числе колебаний. Результаты (эти и последующие) занести в табл. 4.1.

Таблица 4.1

№ п/п	Число полн. колеб. N	Колебания на оси O_1		Колебания на оси O_2			
		t_1, с	T_1, с	t_2, с	T_2, с	$(T_{2i} - \langle T_2 \rangle)$, с	$(T_{2i} - \langle T_2 \rangle)^2$, с^2
1 2 . . .							
Другие данные		$b_1 = \pm$ $b_2 = \pm$		$m = \pm$ $g = \pm$		$L_1 =$ $L_2 =$	

3. Снять маятник и, подвесив его на ось $\boldsymbol{O_2}$, проделать тоже, что и в п.2.

4. Вычислить периоды колебаний $\boldsymbol{T_1}$ и $\boldsymbol{T_2}$ для каждого из опытов и их средние значения $\langle \boldsymbol{T_1} \rangle$ и $\langle \boldsymbol{T_2} \rangle$.

5. По формуле

$$< I > = \frac{< T >^2 < m >< g >< b >}{4\pi^2}$$

(см. (4.12)) вычислить $<I_1>$ и $<I_2>$.

6. Для момента инерции I_2 вычислить относительную погрешность ε_{I2} (для I_1 принять ее такой же). Для этого:

а) подсчитать $T_{2i} - <T_2>$, $(T_{2i} - <T_2>)^2$, $\sum_{i=1}^{n}\left(T_{2i} - < T_2 >\right)^2$ (см. табл. 4.1);

б) вычислить абсолютную погрешность в измерении периода колебаний

$$\Delta T_2 = \sqrt{t_{\alpha,n}^2 \frac{\sum_1^n \left(T_{2i} - < T_2 >\right)^2}{n\,(n-1)} + \left(\frac{\Delta t_{np}}{N} \cdot \frac{t_{\alpha,\infty}}{3}\right)^2 + \left(\alpha \frac{\Delta_t}{2}\right)^2}\,,$$

где n - число измерений; N – число выбранных колебаний; Δt_{np} - приборная погрешность секундомера; $t_{\alpha,n}$ - коэффициент Стьюдента (определяется по таблице в зависимости от выбранной надежности α и n);

в) определить относительную погрешность

$$\varepsilon_{I_2} = \sqrt{4\left(\frac{\Delta T_2}{< T_2 >}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta \pi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{< m >}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b_2}{< b_2 >}\right)^2}\ .$$

7. Вычислить абсолютные погрешности в определении моментов инерции:

$$\Delta I_1 = \varepsilon_I <I_1>, \quad \Delta I_2 = \varepsilon_I <I_2>.$$

8. Результаты представить в виде:

$$I_1 = <I_1> \pm \Delta I_1, \quad I_2 = <I_2> \pm \Delta I_2 \quad \text{при } \alpha = \ldots\ , \quad \varepsilon_I = \ldots\ \%\ .$$

9. Вычислить приведенные длины L_1 и L_2 маятников по формуле

$$L = \frac{< I >}{m < b >}.$$

10. При наличии математического маятника установить его длину l равной L_1 (или L_2) и убедиться в синхронности колебаний физического и математического маятников.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Физический маятник.
2. Уравнения колебаний физического маятника (дифференциальное уравнение и его решение).
3. Частота и период колебаний физического маятника.
4. Приведенная длина физического маятника.
5. Точка подвеса и центр качаний физического маятника.
6. Метод определения $\boldsymbol{I}$ в данной работе.
7. Порядок выполнения работы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ОБОРОТНЫМ ФИЗИЧЕСКИМ МАЯТНИКОМ

Цель: познакомиться с одним из методов определения ускорения свободного падения.

Приборы и принадлежности: оборотный физический маятник (ФМ), секундомер, линейка.

Описание прибора и метода определения

Оборотный ФМ, используемый в данной работе, представляет собой (рис. 5.1) стержень 1, снабженный двумя металлическими чечевицами 2 и 3 и двумя опорными неподвижными призмами 4 и 5, за которые маятник может быть подвешен поочередно с поворотом на 180^0. Чечевица 2 закреплена неподвижно, а чечевица 3 подвижна, и ее положение можно отмечать по шкале 6, нанесенной на стержень. Чечевица 3 фиксируется на стержне винтом 7.

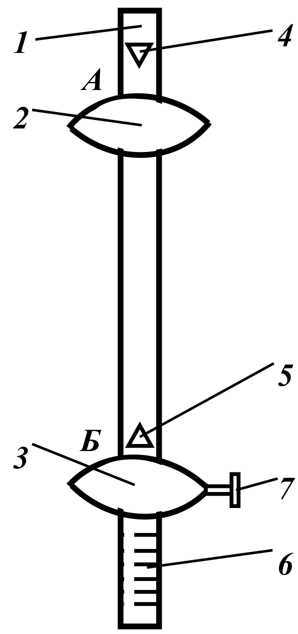

Рис. 5.1

Определение ускорения свободного падения в данной работе основано на использовании формулы (4.10)

$$\boldsymbol{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{g}}},$$

откуда

$$\boldsymbol{g} = \frac{4\pi^2}{\boldsymbol{T}^2}\boldsymbol{L}, \qquad (5.1)$$

где $\boldsymbol{L}$ - приведенная длина ФМ; $\boldsymbol{T}$ - период колебаний.

Период колебаний определить нетрудно: нужно измерить время $\boldsymbol{t}$ определенного количества колебаний $\boldsymbol{N}$ и тогда $\boldsymbol{T = t/N}$. Определение $\boldsymbol{L}$ связано со свойством точек подвеса $\boldsymbol{O}$ и качания $\boldsymbol{O'}$ (см. рис 4.1) быть обратимыми. Это свойство состоит в том, что при подвешивании маятника на ось, проходящую через точку $\boldsymbol{O'}$, период колебаний маятника, а следовательно, и приведенная длина не изменяются, т. е. $\boldsymbol{L'=L}$. Действительно, приведенная длина $\boldsymbol{L'}$ маятника при колебаниях вокруг $\boldsymbol{O'}$ в соответствии с формулой (4.11) запишется

$$\boldsymbol{L'} = \frac{\boldsymbol{I}_\text{c}}{\boldsymbol{mb'}} + \boldsymbol{b'}. \qquad (5.2)$$

но $\boldsymbol{b' = L - b}$ (см. рис.4.1), а $\boldsymbol{L} = \dfrac{\boldsymbol{I}_\text{c}}{\boldsymbol{m\,b}} + \boldsymbol{b}$. Следовательно,

$$\boldsymbol{b'} = \frac{\boldsymbol{I}_\text{c}}{\boldsymbol{m\,b}} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{I}_\text{c}}{\boldsymbol{m\,b}}. \qquad (5.3)$$

Подставив (5.2) в (5.3), получим

$$L' = b + \frac{I_c}{m\,b} = L\,.$$

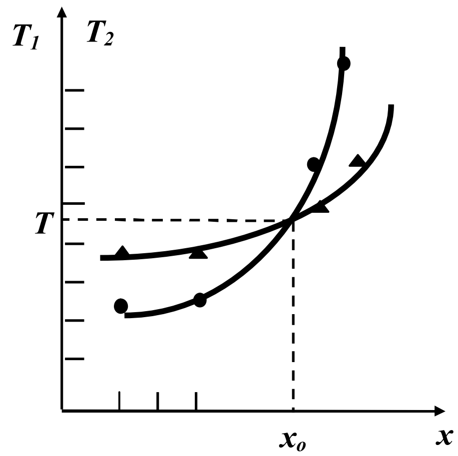

Рис. 5.2

Как уже указывалось, для подвешивания рассматриваемого ФМ при создании колебаний используются опорные призмы 4 и 5. Поэтому, казалось бы, для нахождения $\boldsymbol{L}$ достаточно одну из призм передвигать вдоль стержня до тех пор, пока периоды колебаний $\boldsymbol{T_1}$ и $\boldsymbol{T_2}$ при подвешивании ФМ на одну и другую призмы не будут одинаковы. Это справедливо в определенных пределах, так как периоды $\boldsymbol{T_1}$ и $\boldsymbol{T_2}$ могут быть равны и в том случае, когда расстояние между призмами не равно приведенной длине маятника. Тогда расстояние между призмами и будет приведенной длиной маятника. Однако конструктивно оказалось более удобным опорные призмы сделать неподвижными, приняв расстояние между ними за $\boldsymbol{L}$, а передвигать одну из чечевиц (при этом смещается центр масс маятника), добиваясь равенства периодов $\boldsymbol{T_1}$ и $\boldsymbol{T_2}$. Практически это делается так: снимаются зависимости $\boldsymbol{T_1 = f\,(x)}$ и $\boldsymbol{T_2 = f\,(x)}$, где $\boldsymbol{x}$ - положение чечевицы от условно выбранного нуля на стержне маятника. Затем строятся соответствующие графики (рис. 5.2). Точка пересечения кривых соответствует одинаковым значениям периодов колебаний: $\boldsymbol{T_1 = T_2 = T}$, а потому значение $\boldsymbol{x_0}$ положения чечевицы показывает, что расстояние между призмами есть приведенная длина маятника с периодом $\boldsymbol{T}$.

Порядок выполнения работы

1. Снять маятник с подвеса и, положив его на стол, измерить линейкой расстояние $\boldsymbol{L}$ между призмами. Результат занести в табл. 5.1.

Таблица 5.1

№	Призма *А*			Призма *Б*			Другие результаты
п/п	N_1	t_1, с	T_1, с	N_2	t_2, с	T_2, с	
4 6 .							$\boldsymbol{L}$ =

. . 12							x_0 = T =

2. Снять зависимость $T_1\,(x)$, перемещая чечевицу от x = 4 см до x = 12 см. Для чего:

а) после установки чечевицы 3 на том или ином расстоянии x маятник подвесить на призму 4 и, приведя его в колебания ($\varphi \leq 6^0$), измерить время t для 30 колебаний (отсчет времени лучше получить после того, как маятник сделает несколько колебаний);

б) повернуть маятник на 180^0 и, подвесив на призму 5, произвести те же измерения, что и в п. 2.а;

в) для всех x по данным пп. а) и б) вычислить периоды колебаний T_1 и T_2. Все результаты занести в табл. 5.1.

3. Построить на миллиметровой бумаге графики зависимостей $T_1 = f(x)$ и $T_2 = f(x)$ в виде плавных кривых. Найти точку пересечения графиков, по которой определить T и x_0 (см. рис. 5.2).

4. По формуле (5.1) вычислить искомое ускорение свободного падения:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} L .$$

5. По требованию преподавателя вычислить Δg и ε_g (способ определения Δg и ε_g обсудить с преподавателем).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Физический маятник.
2. Уравнение колебаний физического маятника (дифференциальное уравнение и его решение).
3. Частота и период колебаний физического маятника.
4. Точка подвеса и центр качаний физического маятника.
5. Приведенная длина физического маятника.
6. Доказательство обратимости точки подвеса и центра качания физического маятника.
7. Метод определения g в данной работе.
8. Порядок выполнения работы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

ИЗУЧЕНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

Цель работы. Познакомиться с особенностями свободных незатухающих и затухающих колебаний.

Приборы и принадлежности: установка - пружинный маятник с набором грузов и шкалой, секундомер, сосуд с водой.

Сведения из теории

Механические колебания - это многократно повторяющиеся движения тела, т.е. движения, при которых тело периодически (через равные промежутки времени) проходит через одно и то же положение в одном и том же направлении.

Простейшими и в то же время часто встречающимися являются **гармонические колебания - такие колебания, которые происходят по закону синуса (косинуса).**

В зависимости от характера воздействия, оказываемого на колеблющуюся систему, различают **свободные** (собственные) колебания, **вынужденные** колебания, **автоколебания** и другие. Рассмотрим свободные колебания.

Свободными называются колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе, после того, как она однажды была выведена из положения равновесия. Различают незатухающие и затухающие свободные колебания, хотя, строго говоря, незатухающих свободных колебаний в природе не бывает.

Рассмотрим свободные колебания на примере пружинного маятника, представляющего собой тело (материальную точку), подвешенное на пружине (рис. 6.1). В состоянии равновесия сила тяжести тела $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{m}\ \boldsymbol{g}$ ($\boldsymbol{m}$ - масса тела, $\boldsymbol{g}$ – ускорение свободного падения) уравновешивается упругой силой, действующей на тело со стороны пружины $\boldsymbol{F_{0\ упр}} = \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{x_o}$ ($\boldsymbol{k}$- коэффициент жесткости пружины, $\boldsymbol{x_0}$ - равновесное удлинение пружины). Таким образом,

$$kx_0 = mg\ . \qquad (6.1)$$

Если тело вывести из состояния равновесия (например, оттянуть вниз), а затем отпустить, то оно начнет колебаться. Это и есть свободные колебания. Выясним характер этих колебаний, пренебрегая пока силами трения.

На колеблющееся тело по-прежнему действуют сила тяжести $\boldsymbol{mg}$ и упругая сила $\boldsymbol{F_{упр}} = -\ \boldsymbol{kx_1}$, где $\boldsymbol{x_1}$ - общее удлинение пружины (см. рис.6.1), разное для различных моментов времени. Знак минус указывает на то, что упругая сила направлена в сторону, противоположную смещению. Следовательно, уравнение движения запишется так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\ x_1 + m\ g\ . \qquad (6.2)$$

Или, учитывая равенство (6.1),

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\ x_1 + k\ x_0 = -k(x_1 - x_0). \qquad (6.3)$$

Обозначив $d^2x/dt^2 = \ddot{x}\ ,\ x_1 - x_0 = x$ ($\boldsymbol{x}$ - смещение тела от положения равновесия), перепишем выражение (6.3) в виде

$$m\ddot{x} = -k\ x \qquad \text{или}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0\ ,$$

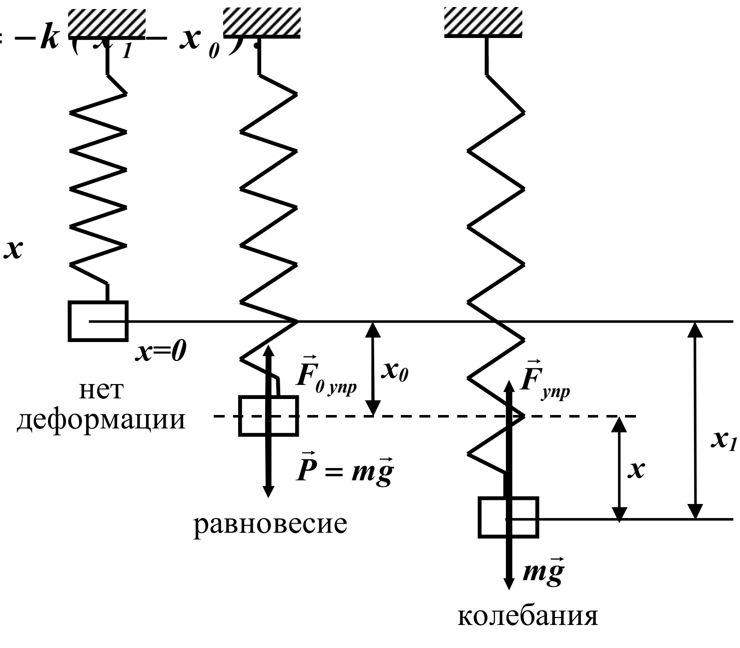

Рис. 6.1

(6.4)

k и m - величины сугубо положительные, поэтому их отношение можно представить в виде квадрата некоторого числа $k/m=\omega_0^2$, тогда уравнение (6.4) запишется как

$$\ddot{x}+\omega_0^2\,x=0\,. \qquad (6.5)$$

Решение уравнения (6.5) имеет вид

$$x=A\cos\left(\omega_0\,t+\alpha\right). \qquad (6.6)$$

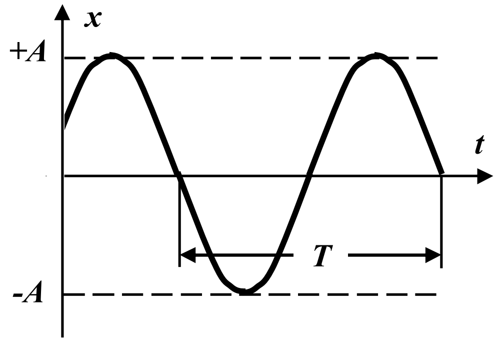

Рис. 6.2

Выражение (6.6) называют уравнением колебаний. Здесь A и α - постоянные, зависящие от начальных условий; A называют *амплитудой* колебаний, α *- начальной фазой,* $(\omega_0 t+\alpha)$ *- фазой* колебаний; $\omega_0=\sqrt{k/m}$ - *циклической частотой* колебаний (число колебаний за 2π секунд). Часто для характеристики колебаний указывают *период колебаний – T* (время одного полного колебания) и *частоту колебаний* ν (число колебаний за единицу времени). Очевидно, что

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega_0}{2\pi}, \qquad T=\frac{1}{\nu}=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \qquad (6.7)$$

Выражение (6.6) показывает, что при данных условиях колебания являются гармоническими и незатухающими (рис.6.2).

Как уже отмечалось, строго незатухающих свободных колебаний не бывает. Дело в том, что энергия колеблющейся системы постепенно расходуется на преодоление сил трения, которые всегда имеют место, поэтому амплитуда колебаний уменьшается. Говорят, что колебания носят затухающий характер.

При небольших скоростях движения тела сила трения пропорциональна скорости v :

$$F_{тр}=-rv=-r\,\dot{x}\,. \qquad (6.8)$$

Уравнение движения маятника с учетом сил трения запишется так:

$$m\,\ddot{x}=-k\,x-r\,\dot{x}\,.$$

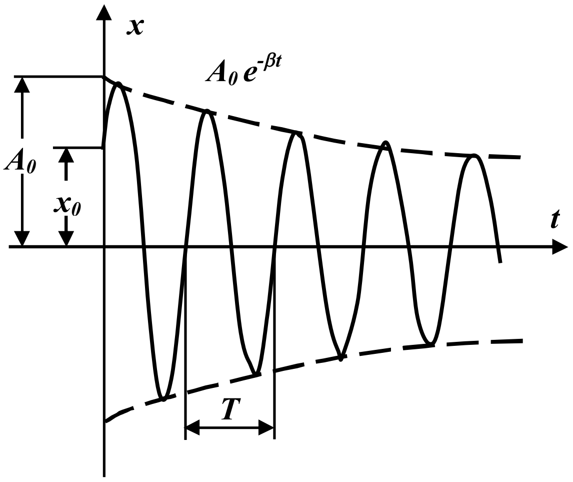

Рис. 6.3

Или, введя обозначения $k/m = \omega_0^2$, $r/m = 2\beta$ и перенеся все слагаемые влево от знака равенства, получим

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,. \tag{6.9}$$

Решением уравнения (6.9) является выражение

$$x = A_0 e^{-\beta t} cos(\omega' t + \alpha)\,, \tag{6.10}$$

в котором $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - циклическая частота свободных затухающих колебаний; $A_0 e^{-\beta t}$ - амплитуда колебаний, убывающая с течением времени по экспоненте; A_0 - начальная амплитуда. График уравнения (6.10) представлен на рис. 6.3. Величина $\beta = r/(2m)$ характеризует скорость затухания. Она называется коэффициентом затухания.

Видно, что $\beta = 1/t_e$, где t_e - время колебаний, за которое амплитуда уменьшилась в e раз (время релаксации).

Скорость затухания характеризуют и двумя другими величинами:

1) декрементом затухания $\sigma = A_N / A_{N+1} = e^{\beta T}$, равным отношению двух соседних (отстоящих по времени на период T) амплитуд;

2) логарифмическим декрементом затухания, равным, по определению, натуральному логарифму от декремента затухания:

$$\delta = ln\,\sigma = \beta T\,. \tag{6.11}$$

Оказывается, $\delta = 1/N_e$, где N_e - число колебаний, за которое амплитуда уменьшается в e раз.

Описание установки, метод определения *β*

Установка (рис. 6.4) включает штатив 1, на кронштейне которого закреплена пружина 2. К нижнему концу пружины подвешена платформа 6 со съемными грузами 5. Верхний конец платформы снабжен указателем 4, который при смещении маятника скользит вдоль масштабной линейки 3 с зеркалом.

Для получения быстро затухающих колебаний платформу с грузами помещают в сосуд с водой. Коэффициент затухания определяют из следующих соображений: при затухающих колебаниях амплитуда $\boldsymbol{N}$ - го колебания связана с начальной амплитудой $\boldsymbol{A_0}$ соотношением

$$\boldsymbol{A_N = A_0\, e^{-\beta t_N}}\,,$$

где $\boldsymbol{t_N}$ - время $\boldsymbol{N}$ колебаний, за которое амплитуда уменьшилась от $\boldsymbol{A_0}$ до $\boldsymbol{A_N}$. Отсюда

$$\beta = \frac{1}{t_N}\, ln\, \frac{A_0}{A_N}\,. \qquad (6.12)$$

Порядок выполнения работы

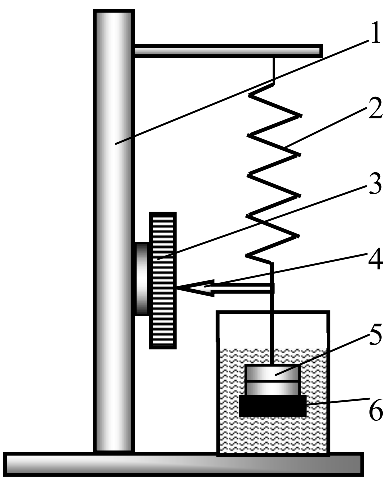

Рис. 6.4

1. **Определение коэффициента жесткости пружины**. Поочередно нагружая платформу одним или несколькими грузами разной массы (суммарная масса грузов $\boldsymbol{\Delta m}$), измерить соответствующие удлинения пружины $\boldsymbol{\Delta x}$ в состоянии равновесия.

По данным каждого из опытов по формуле (6.1) вычислить коэффициент жесткости пружины. Найти его среднее значение. Результаты занести в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Δm, кг	$x_н$, мм	$x_к$, мм	$\Delta x = x_к - x_н$, мм	$k = \dfrac{\Delta m\, g}{\Delta x}$, Н/м	$\langle k \rangle$, Н/м

2. **Установление зависимости периода колебаний от массы маятника.** Нагружая пружину грузами разной массы и инициируя колебания, определить в каждом случае период колебаний $\boldsymbol{T}$. Амплитуда колебаний должна быть достаточно малой. Для этого определить с помощью секундомера продолжительность не менее чем 50 колебаний. По этим данным вычислить $\boldsymbol{T}$. Результаты занести в табл. 6.2 ($\boldsymbol{m}$ - суммарная масса платформы и грузов).

Таблица 6.2

m, *кг*	*N*	t_N, *с*	$T = t_N/N$, *с*	$T_{теор}$, *с*	$\Delta T\,/\,T \times 100\,\%$

Для тех же нагрузок вычислить период колебаний по формуле

$$T_{теор} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

и относительную величину расхождения в процентах между $\boldsymbol{T_{теор}}$ и $\boldsymbol{T}$ ($\Delta \boldsymbol{T} = |\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T_{теор}}|$).

Построить график зависимости $T = f\left(\sqrt{m}\right)$ или $T^2 = f\left(m\right)$ и сделать вывод о совпадении или несовпадении опыта с теорией.

3. Определение коэффициента затухания и логарифмического декремента затухания колебаний. Маятник поместить в сосуд с водой (верхняя плоскость груза должна находиться на глубине 25-30 мм). Приведя маятник в движение, убедиться, что колебания носят быстро затухающий характер.

При неизменных $\boldsymbol{A_0}$ и $\boldsymbol{N}$ не менее 7 раз измерить:

- амплитуду $\boldsymbol{A_N}$ после совершения маятником $\boldsymbol{N}$ колебаний;
- продолжительность $\boldsymbol{t}$ этих $\boldsymbol{N}$ колебаний.

За амплитуду A_0 удобно взять первое отклонение маятника, за $\boldsymbol{A_N}$ - амплитуду после 10 - 15 колебаний. Результаты занести в табл. 6.3.

Таблица 6.3

Номер опыта	A_N, мм	*t*, с	Величины, характеризующие колебания	
1			A_0 =	$\langle\beta\rangle$ =
2			N =	$\langle\delta\rangle$ =

. . .			$<t> =$ $\quad$ $<t_e> =$ $<T> =$ $\quad$ $<N_e> =$
Σ			

По данным измерений вычислить средние значения конечной амплитуды $<A_N>$ и общего времени колебаний $<t>$, а также средние значения других величин, указанных в табл. 6.3.

Найти абсолютную и относительную ошибки в определении коэффициента затухания, принимая $A_0 = const$:

$$\Delta\beta = \sqrt{\left[ln \frac{A_0}{\langle A_N \rangle} \cdot \frac{\Delta t}{\langle t \rangle^2} \right]^2 + \left(\frac{\Delta\, A_N}{\langle t \rangle \langle A_N \rangle} \right)^2}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta\,\beta}{\langle \beta \rangle}.$$

Абсолютные ошибки конечной амплитуды $\Delta\, A_N$ и времени колебаний $\Delta\, t$ вычисляются, как всегда, по соответствующим формулам для прямых измерений.

Результаты представить в виде:

$$\beta = \langle \beta \rangle \pm \Delta\,\beta \qquad \text{при } \alpha = \ \dots\ , \ \varepsilon = \quad \%.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Колебания. Свободные колебания.
2. Свободные незатухающие колебания.
3. Уравнения свободных незатухающих колебаний (дифференциальное уравнение и его решение).
4. Величины, характеризующие колебания: амплитуда, частота и циклическая частота, фаза и начальная фаза.
5. Свободные затухающие колебания.
6. Уравнения затухающих колебаний (дифференциальное уравнение и его решение).
7. Величины, характеризующие скорость затухания колебаний: коэффициент затухания, декремент затухания, логарифмический декремент затухания.
8. Пружинный маятник. Способы определения в данной работе: коэффициента жесткости пружины, периода колебаний маятника, коэффициента затухания, логарифмического декремента затухания.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ АДИАБАТЫ ВОЗДУХА

Цель работы: познакомиться с одним из методов определения показателя адиабаты C_p / C_v.

Приборы и принадлежности: установка Клемана - Дезорма для определения C_p / C_v.

Сведения из теории

Состояние газа характеризуется тремя величинами - параметрами состояния: давлением P, объемом V и температурой T. Уравнение, связывающее эти величины, называется уравнением состояния газа. Для идеального газа уравнением состояния является уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$PV = \frac{M}{\mu} RT \,,$$

где M - масса газа; μ - масса одного моля; R - универсальная газовая постоянная.

Для одного моля:

$$PV = RT \,. \tag{7.1}$$

Теплоемкостью тела называется количество теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы изменить его температуру на один градус:

$$C_{\text{тела}} = \frac{dQ}{dT} \quad \text{(Дж/К)}.$$

Здесь dT - изменение температуры тела при сообщении ему количества теплоты dQ.

Теплоемкость единицы массы тела называется удельной теплоемкостью:

$$C = \frac{dQ}{MdT} \quad \text{(Дж/(кг·К))}.$$

Теплоемкость одного моля вещества называется молярной теплоемкостью:

$$C = \frac{dQ}{\frac{M}{\mu} \cdot dT} \quad (\text{Дж/(моль·К)}) \ . \qquad (7.2)$$

Величина теплоемкости газа зависит от условий его нагревания, т. е. от того, нагревается ли газ при постоянном объеме (обозначим молярную теплоемкость в этом случае через $\boldsymbol{C_v}$) или процесс нагревания происходит при постоянном давлении ($\boldsymbol{C_p}$). Теплоемкости $\boldsymbol{C_p}$ и $\boldsymbol{C_v}$ связаны между собой. Эту связь можно получить, пользуясь уравнением состояния (7.1), написанным для одного моля газа, и **первым началом термодинамики,** которое можно сформулировать следующим образом: количество теплоты $\boldsymbol{dQ}$, переданное системе, затрачивается на увеличение ее внутренней энергии $\boldsymbol{dU}$ и на работу $\boldsymbol{dA}$, совершаемую системой над внешними телами:

$$dQ = dU + dA. \qquad (7.3)$$

Элементарная работа

$$dA = P \cdot dV \ . \qquad (7.4)$$

Исходя из определения молярной теплоемкости (7.2)

$$C = \frac{dU}{dT} + \frac{dA}{dT} \ .$$

При изохорическом процессе $\boldsymbol{V}$ = const, следовательно, $\boldsymbol{dV}$ = 0 и $\boldsymbol{dA}$= 0 (см. формулу (7.4)), поэтому

$$C_v = \frac{dU}{dT} \quad . \qquad (7.5)$$

При изобарическом процессе $\boldsymbol{P}$ =const, следовательно,

$$C_p = \frac{dU}{dT} + p\frac{dV}{dT} \ . \qquad (7.6)$$

Из уравнения газового состояния (7.1) получаем

$$PdV + VdP = RdT.$$

Но $dP = 0$ (так как $P = \mathrm{const}$), потому $P\,dV = R\,dT$. Учитывая это равенство и заменяя dU через $C_v\,dT$, из выражения (7.6) получим

$$C_p = C_v + R. \tag{7.7}$$

Таким образом $C_p > C_v$: при нагревании при постоянном давлении тепло, сообщенное газу, идет не только на изменение его внутренней энергии, но и на совершение газом работы.

Важную роль в термодинамике играет величина $\gamma = C_P/C_v$. В частности, γ входит в уравнение Пуассона, описывающее ***адиабатический процесс***, т.е. процесс, протекающий без теплообмена с окружающей средой ($dQ = 0$). Уравнение Пуассона в переменных P, V имеет вид

$$PV^{\gamma} = const. \tag{7.8}$$

Из первого начала термодинамики (7.3) для адиабатического процесса следует:

$$dU + dA = 0,$$

откуда

$$dA = -\,dU = -\,C_v\,dT,$$

т.е. работа в этом случае совершается за счет изменения запаса внутренней энергии.

Описание установки и метода определения C_p/C_v

Для определения $\gamma = C_P/C_v$ в данной работе используется метод, предложенный немецкими физиками Клеманом и Дезормом.

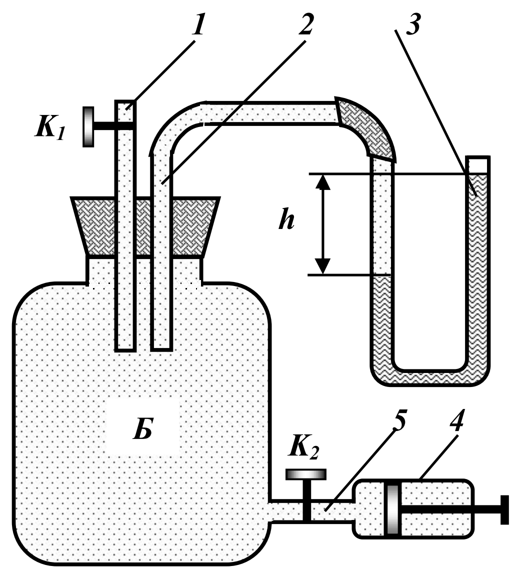

Рис. 7.1

Установка (рис.7.1) состоит из стеклянного баллона ***Б*** емкостью 10 - 15 литров, закрытого пробкой. Через пробку проходят две трубки. Трубка 2 соединена с жидкостным манометром 3, используемым для измерения избыточного по сравнению с атмосферным давления в баллоне. Трубка 1 через кран K_1 соединена с атмосферой. Через отверстие в нижней части баллона проходит третья трубка 5, которая через кран K_2 соединяет баллон с насосом 4.

Пусть при комнатной температуре T_1 газ, находящийся в баллоне, имеет давление P_1, которое несколько выше атмосферного P_0. Избыток давления (отсчет h_1) можно создать насосом при открытом кране K_2 и измерить манометром 3 (кран K_2 после этого должен быть закрыт), т. е.

$$P_1 = P_0 + h_1, \quad h_1 << P_0$$

Если сейчас на короткое время открыть кран K_1, то будет иметь место процесс адиабатического расширения газа (теплопроводность стенок баллона мала). Давление газа в баллоне при этом сравняется с атмосферным P_0 (рис.7.2), а температура газа понизится до T_2 (работа расширения совершается за счет внутренней энергии газа).

Уравнение Пуассона (7.8), описывающее адиабатический процесс, в нашем случае удобно записать в переменных ***P, T***:

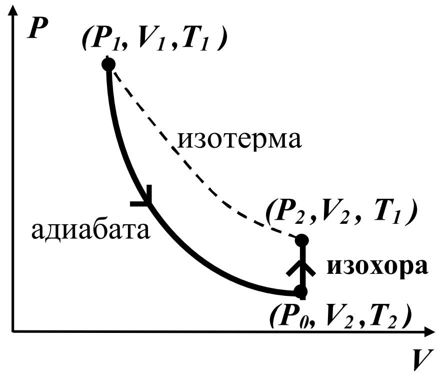

Рис. 7.2

$$\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma}. \tag{7.9}$$

После процесса расширения в результате теплообмена температура оставшегося в баллоне газа начинает повышаться. Будет повышаться и давление газа, причем до тех пор, пока температура вновь не сравняется с комнатной.

Обозначим это давление через P_2. Очевидно, $P_2 = P_0 + h_2$, где $h_2 << P_0$ - избыточное давление, измеренное по манометру в данном случае. Таким образом, сейчас имеет место изохорный процесс нагревания газа со скоростью, определяемой теплопроводностью стеклянных стенок баллона. Как известно, такой процесс подчиняется закону Гей - Люссака:

$$\frac{P_2}{P_0} = \frac{T_1}{T_2}. \tag{7.10}$$

Оба процесса (адиабатический, и изохорный) изображены в координатах P,V на рис.7.2.

Сравнивая (7.9) и (7.10), можно записать: $\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{P_2}{P_0}\right)^{\gamma}$.

Учитывая, что $P_1 = P_0 + h_1$, а $P_2 = P_0 + h_2$, последнее выражение представим как

$$\left(\frac{P_0 + h_1}{P_0}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{P_0 + h_2}{P_0}\right)^{\gamma}$$

или

$$\left(1 + \frac{h_1}{P_0}\right)^{\gamma-1} = \left(1 + \frac{h_2}{P_0}\right)^{\gamma}. \tag{7.11}$$

Так как h_1 и h_2 малы по сравнению с P_0 , то обе части равенства (7.11) можно разложить в ряд. Ограничиваясь членами первого порядка, получаем

$$1 = (\gamma - 1)\frac{h_1}{P_0} = 1 + \gamma\frac{h_2}{P_0},$$

откуда

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \tag{7.12}$$

Выражение (7.12) является рабочей формулой для определения γ. Как видно, для этого достаточно при проведении опытов измерить h_1 и h_2 .

Порядок выполнения работы

Перед началом измерений убедитесь в том, что краны и места сочленений трубок достаточно герметичны. Для этого, перекрыв кран K_1 , через кран K_2 с помощью насоса заполните баллон воздухом до давления, превышающего атмосферное на 100 - 200 мм водяного столба. Кран K_2 закройте и наблюдайте за изменением давления, которое сначала будет понижаться. Если через некоторое время (5 - 8 с) давление перестанет понижаться, то установка исправна. В противном случае необходимо найти и устранить течь.

Измерения проводить в таком порядке:

1. При перекрытом кране K_1 закачивайте воздух в баллон до тех пор, пока разность уровней в манометре не достигнет 300-400 мм вод. ст. Кран K_2 закройте.

Ждите, пока уровень воды в манометре перестанет изменяться. Сделайте отсчет разности уровней h_1 и этот результат запишите в табл. 7.1.

2. Быстро откройте кран K_1. Когда давление сравняется с атмосферным (разность уровней в манометре равна нулю), перекройте его. Давление должно повышаться. Дождитесь момента, при котором давление в баллоне перестанет повышаться, и измеряйте h_2 – разность уровней воды в коленах манометра. Результат запишите в табл. 7.1.

Таблица 7.1

№ п/п	h_1, мм	h_2, мм	γ	$<\gamma>$	$\gamma_i - <\gamma>$	$\Delta_i \gamma^2 = (\gamma_i - <\gamma>)^2$	$\sum \Delta\gamma_i^2$
1							
2							
3							
.							
.							
.							

3. Пункты 1 и 2 повторите не менее 7 раз.

4. По результатам каждого из опытов по формуле (7.12) вычислите γ, а затем его среднее значение $<\gamma>$.

5. Вычислите абсолютную $\Delta\gamma$ и относительную σ_γ ошибки по формуле:

$$\Delta\gamma = t_{\alpha,n}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i - <\gamma>)^2}{n(n-1)}}\ , \qquad \varepsilon_\gamma = \frac{\Delta\gamma}{<\gamma>}\ ,$$

где $t_{\alpha,n}$ – коэффициент Стьюдента; n – число измерений.

6. Результат представьте в виде:

$\gamma = \langle\gamma\rangle \pm \Delta\gamma$ при $\varepsilon_\gamma = \ldots$ %, $\alpha = \ldots$ (α - надежность результатов).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется теплоемкостью тела, удельной теплоемкостью вещества, молярной теплоемкостью вещества? В каких единицах измеряются эти величины?
2. Что такое молярная теплоемкость при постоянном объеме (C_v), при постоянном давлении (C_p)?
3. Какова связь между C_p и C_v?
4. В чем состоит первое начало термодинамики?
5. Какой процесс называется изохорическим?
6. Какой процесс называется изобарическим?
7. В связи с чем рассматриваются в данной работе изохорический и изобарический процессы?
8. Какой процесс называется адиабатическим?
9. Запишите уравнение Пуассона в переменных ***P, V*** и ***P, T***.
10. Что происходит с внутренней энергией и температурой газа при адиабатическом расширении его?
11. Опишите устройство прибора и процессы, происходящие с газом в ходе выполнения работы.
12. Приведите вывод рабочей формулы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трофимова Т.И. Курс физики: Учебное пособие. -7 изд., испр. - М.: Высшая школа, 2001.- 542 с.
2. Детлаф А.А. Курс физики: Учебное пособие для вузов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высшая школа, 1999. – 718 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. М.: Наука,1988. Т. 1- 3.
4. Лабораторный практикум по физике. Под ред. К.А. Барсукова и Ю.И. Уханова. М.: Высшая школа, 1988.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Предельные погрешности некоторых приборов				**Коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha,n}$**			
№ п/п	Приборы	Значение меры	$\Delta X_{пр}$	α / n	0,90	0,95	0,98
1	Линейка	150, 350,	0,5 мм	2	6,31	12,7	31,82

	металлическая	500 мм		3	2,92	4,30	6,96
2	Линейка деревянная	200, 400, 500 мм	0,5 мм	4	2,35	3,18	4,54
				5	2,13	2,76	3,75
3	Линейка пластмассовая	200, 250, 300 мм	1мм	6	2,02	2,57	3,36
				7	1,94	2.45	3,14
4	Гири обычные	1 г, 2 г, 3г	6, 8, 12 мг	8	1,89	2,36	3,00
5	Штангенциркули с ценой деления:			9	1,86	2,31	2,90
				10	1,83	2,26	2,82
				∞	1,65	1,96	2,34
	0,1 мм	0-155 мм	0,1 мм				
	0,05 мм	0-250 мм	0,05 мм				
6	Микрометры с ценой деления 0,01 мм	0-50 мм	4 мкм				
7	Весы лабораторные	до 200 г	3 миним. дел. шкалы				
8	Секундомеры механическ. и электрические	до 30 мин	1 миним. дел. шкалы за 1 оборот секундной стрелки				
9	Термометры стеклянные жидкостные	до 100^0	Цена мин. дел.шкалы, если оно = 1^o,2^o,5^o и удвоенная цена, если $0,2^o$, $0,5^o$				

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Пример обработки результатов прямого измерения

Измерялась длина ***l*** стержня штангенциркуля с ценой деления Δ = 0,1 мм. Полученные данные приведены в нижеследующей таблице (вторая колонка).

№ п/п	$\boldsymbol{l}$, мм	$\boldsymbol{l_i}$ **- <l>,** мм	$\Delta \boldsymbol{l}^2 = (\boldsymbol{l_i} - \langle \boldsymbol{l} \rangle)^2$, мм^2
1	20,8	+0,12	0,0144
2	20,4	-0,28	0,0784
3	20,7	+0,02	0,0004
4	20,9	+0,22	0,0484
5	20,5	-0,18	0,0324
6	20,8	+0,12	0,0144
$\sum$	124,1		
$\langle l \rangle$	20,68		

1) Находим $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{l}_{\mathrm{i}} = 124{,}1$ мм и среднее значение $\langle l \rangle = \frac{\sum \boldsymbol{l}_{\mathrm{i}}}{\mathrm{n}} =$ 20,68 мм.

2) Находим $(\boldsymbol{l_i} - \langle \boldsymbol{l} \rangle)$, $(\boldsymbol{l_i} - \langle \boldsymbol{l} \rangle)^2$ и $\sum (\boldsymbol{l_i} - \langle \boldsymbol{l} \rangle)^2 = 1884 \cdot 10^{-4}$ мм^2.

3) Задаемся надежностью $\alpha = 0{,}95$ и по таблице (приложение 1) находим $t_{\alpha,n} = 2{,}57$ и $t_{\alpha,\infty} = 1{,}96$.

4) Вычисляем абсолютную и случайную погрешности

$$\Delta \boldsymbol{l}_{сл} = t_{\alpha,n} \sqrt{\frac{\sum \Delta \boldsymbol{l}_i^2}{n(n-1)}} = 2{,}57 \sqrt{\frac{1884 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 5}} = 0{,}20 \text{ мм.}$$

5) Устанавливаем **предельную** погрешность прибора $\Delta \boldsymbol{l}_{пр} = \Delta = 0{,}1$ мм и вычисляем приборную погрешность

$$\Delta \boldsymbol{l}_{пр}^{ст} = t_{\alpha,\infty}/3 \cdot \Delta = 1{,}96/3 \cdot 0{,}1 = 0{,}085 \text{ мм.}$$

6) Погрешность округления. Отсчет по нониусу округлялся до целого деления, значит, $\boldsymbol{h} = \Delta = 0{,}1$ мм, и

$$\Delta \boldsymbol{l}_{окр} = \alpha \cdot \boldsymbol{h}/2 = 0{,}95 \cdot 0{,}1/2 = 0{,}048 \text{ мм.}$$

7) Полная абсолютная погрешность

$$\Delta \boldsymbol{l} = \sqrt{\Delta \boldsymbol{l}_{сл}^2 + \Delta \boldsymbol{l}_{пр}^2 + \Delta \boldsymbol{l}_{окр}^2} = \sqrt{0{,}20^2 + 0{,}0085^2 + 0{,}048^2} \text{ мм} = 0{,}22 \text{ м.}$$

8) Относительная погрешность

$$\varepsilon_l = \Delta \boldsymbol{l} / \langle \boldsymbol{l} \rangle = 0{,}22/20{,}68 = 0{,}0106 \,; \quad \varepsilon \approx 1{,}1\ \%.$$

9) Итог: $\boldsymbol{l} = (22{,}7 \pm 0{,}2)$ мм. $\varepsilon \approx 1\%$ при $\alpha = 0{,}95$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Пример обработки результатов косвенного измерения

Определялось ускорение свободного падения $\boldsymbol{g}$ с помощью математического маятника. После обработки результатов измерений длины маятника $\boldsymbol{l}$ и периода колебаний $\boldsymbol{T}$ были получены данные: $\boldsymbol{l}$ = (1,203 ± 0,004)м при α = 0,95. $\boldsymbol{T}$ =(2,21 ± 0,02) с.

Связь между $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{l}$, и $\boldsymbol{T}$ следующая:

1) Вычисляем <$\boldsymbol{g}$>: <$\boldsymbol{g}$> = $\dfrac{4\pi^2}{<T>^2}<l>=\dfrac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 1{,}203}{2{,}21^2}=9{,}71$ м/с^2.

2) Т.к. $\boldsymbol{g}$ представляет собой *произведение* $g = 4\pi^2 l^1 T^{-2}$, то сначала вычисляем относительную ошибку.

$$\varepsilon_g = \sqrt{4\varepsilon_\pi^2 + \varepsilon_l^2 + 4\varepsilon_T^2} = \sqrt{4\left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{<l>}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta T}{<T>}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{4\left(\frac{0{,}005}{3{,}14}\right)^2 + \left(\frac{0{,}004}{1{,}203}\right)^2 + 4\left(\frac{0{,}02}{2{,}21}\right)^2} = 1{,}86\cdot 10^{-2} = 0{,}19.$$

3) Абсолютная погрешность $\Delta g = <g> \cdot \varepsilon_g = 9{,}71\cdot 0{,}19 = 0{,}184$ м/с^2.

Итог: $\boldsymbol{g}$ = (9,71 ± 0,18) м/с^2. ε $\approx$ 2% при α = 0,95.

Лицензия ЛР № 020370 от 22.01.92
Корректор И.Н. Жеганина
Подписано к печати
Формат 60х84/16. Объем 3,3.
Тираж 600. Заказ

Редакционно-издательский отдел и ротапринт
Пермского государственного технического университета